Konzeption und Fehlerrechnung für das Projekt: Bestimmung des Erdradius, der Erdmasse und der Erddichte mittels der Pendeluhr von Otto von Guericke

Martin Nischang und Klaus Retzlaff
Astronomische Gesellschaft Magdeburg e.V.

Projektidee: Mittels der Uhr Otto von Guerickes wird der Erdradius, die Erdmasse und die mittlere Dichte der Erde ermittelt. In einem evakuierten Behälter wird die vom Magdeburger Uhrmachermeister, Herrn Joachim Hoppe, rekonstruierte und funktionsfähige Otto-von-Guericke-Uhr platziert. Mittels einer Laserlichtschranke wird über einen Zeitraum von einem Monat der Takt der Uhr am Fuße des Magdeburger Doms gemessen und die Gesamtdauer für eine vorgegebene Taktanzahl ermittelt. Eine zweite Messung erfolgt analog an der höchst möglichen Stelle des Doms. Die Temperatur wird in beiden Experimenten konstant gehalten, um thermische Einflüsse auf die Pendellänge auszuschalten. Nach Bekantgabe der Ergebnisse, die zeigen sollen, was mit Ottos Uhr möglich ist, wird die Uhr offiziell an die Otto-von-Guericke-Gesellschaft übergeben. Alternativ ist es aber auch möglich, zuerst die Übergabe durchzuführen und dann, ebenfalls öffentlichkeitswirksam, das Experiment durchzuführen. Das Projekt hat einen doppelten Otto-von-Guericke-Bezug von planetarischer Dimension und ist daher als schönes Gemeinschaftsprojekt zwischen der Otto-von-Guericke-Gesellschaft, der Astronomischen Gesellschaft Magdeburg, und der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg geeignet. Zugleich dient dieses Experiment dazu, andere Menschen für die Physik zu begeistern.

0. Theoretische Grundlagen

Die theoretischen Grundlagen sind in [1] dargestellt. Die Otto-von-Guericke-Uhr wird als Pendel betrachtet, es gilt die Gleichung für die Fallbeschleunigung g :

$$g = 4 \cdot \pi^2 \frac{l}{\tau^2}, \qquad (1)$$

unter der Annahme kleiner Pendelausschläge. In (1) geht die Pendellänge l und die Periodendauer τ ein. Um periodische und a-periodische Fehler herauszumitteln erfolgt die Messung über eine hinreichend große Anzahl von Takten k. Der Zusammenhang zwischen Taktzahl, Periodendauer und Messzeit T ist:

$$\tau = \frac{T}{k} \qquad (2)$$

Durch Einsetzen in (1) folgt:

$$g = 4 \cdot \pi^2 \cdot l \frac{k^2}{T^2} \qquad (3)$$

Physikalisch ist g vom Abstand zum Erdmittelpunkt und von der Erdmasse abhängig. Da diese beiden Größen bestimmt werden sollen, sind 2 Gleichungen für diese beiden als unbekannt angenommenen Größen erforderlich. Diese beiden unabhängigen Gleichungen gewinnt man, wenn zwei Messungen in unterschiedlichem Abstand vom Erdmittelpunkt unter Nutzung der Beziehung (1) durchgeführt werden. Mittels des Newtonschen Gravitationsgesetzes ergibt sich für den Radius der Erde:

$$R = h \frac{\tau_0}{\Delta\tau} = h \frac{T_0}{\Delta T}, \qquad (4)$$

für die Erdmasse:

$$M = \frac{l}{f} \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\Delta\tau} \right)^2 = \frac{l}{f} \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot h \cdot k}{\Delta T} \right)^2 \qquad (5)$$

und für die mittlere Dichte der Erde:

$$\rho = \frac{3 \cdot \pi}{f} \frac{l}{h} \frac{\Delta\tau}{\tau_0^3} = \frac{3 \cdot \pi}{f} \frac{l}{h} \frac{k^2}{T^2} \frac{\Delta T}{T_0}. \qquad (6)$$

Es sind:

Gravitationskonstante:	f
Höhenunterschied:	h
Differenz der Messgrößen	Δ.

Die Genauigkeit und der Erfolg des Experimentes hängen von der Genauigkeit der Bestimmung der Fallbeschleunigungen an den beiden Messorten ab. Unter Anwendung des Fehlerfortpflanzungs-gesetzes

Konzeption und Fehlerrechnung für das Projekt: Bestimmung des Erdradius, der Erdmasse und der Erddichte mittels der Pendeluhr von Otto von Guericke

Martin Nischang und Klaus Retzlaff
Astronomische Gesellschaft Magdeburg e.V.

$$\delta g = \left|\frac{\partial g}{\partial l}\right|\delta l + \left|\frac{\partial g}{\partial T}\right|\delta T + \delta\left|\frac{\partial g}{\partial k}\right|\delta k \qquad (7)$$

finden wir für den Fehler der Messung:

$$\delta g = 4\cdot\pi^2\frac{k^2}{T^2}\delta l + 4\cdot\pi^2\cdot l\frac{k^2}{T^2}\frac{\delta T}{T}. \qquad (8)$$

Wegen des Zusammenhangs (2) aber auch weil k eine festgelegte natürliche Zahl ist, kann $\delta k = 0$ gesetzt werden. k wird durch ein Zählwerk eindeutig und fehlerfrei bestimmt.
Die Betrachtung von (8) zeigt, dass auf Grund von $\frac{\delta T}{T}$, der zweite Term beliebig klein wird, wenn nur die Messung hinreichend lange durchgeführt wird. Dem gegenüber wäre ein Fehler in der Pendellänge von systematischer Natur. Wegen der Kleinheit des zu erwartenden Effektes kann an diesem Fehler das Experiment scheitern. Darum muss die Pendellänge hoch genau bestimmt werden. Dabei geht es nicht um eine genaue Längenmessung. Die Pendellänge ist hier dynamisch zu bestimmten, als effektive Pendellänge, welche die Schwingungseigenschaften des Uhrenpendels bestimmt.

1. Bestimmung der Pendellänge
Die Ungenauigkeit der Pendellänge der Uhr ist die kritische Größe für das Experiment. Daher ist es nötig, diese mit sehr hoher Genauigkeit zu bestimmen. Eine Möglichkeit, das zu tun, ist durch ein hoch genaues supraleitendes Gravimeter möglich, mit dem die Fallbeschleunigung am unteren Messorte bestimmt wird. Wir bezeichnen die so „exakt“ bestimmt Fallbeschleunigung mit $\widehat{g}$. Da die erste Messung über die Zeit T_0 (ca. 1 Monat) durchgeführt wird, kann diese Zeit benutzt werden, um die Pendellänge zu bestimmen:

$$l = \frac{\widehat{g}}{4\cdot\pi^2}\frac{T_0^2}{k^2} \qquad (9)$$

Der Fehler der Pendellänge ist dann:

$$\delta l = \frac{T_0^2}{4\cdot\pi^2\cdot k^2}\delta\widehat{g} + \frac{\widehat{g}\cdot T_0}{2\cdot\pi^2\cdot k^2}\delta T_0 \qquad (10)$$

Es muss ermittelt werden, welche Genauigkeiten für $\widehat{g}$ und T_0 erreicht werden können.

2. Der Gangunterschied
Der Gangunterschied über k Takte ist:

$$\Delta T = T_h - T_0 = k\cdot\Delta\tau \qquad (11)$$

mit

$$\Delta\tau = 2\cdot\pi\cdot\sqrt{l}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{g_h}} - \frac{1}{\sqrt{g_0}}\right). \qquad (12)$$

Die Indizes bezeichnen den Messort, d.h. $g_0 = g(R)$ und $g_h = g(R+h)$, wobei R der Erdradius am Boden vom Magdeburger Dom ist. Es wird hier näherungsweise angenommen, dass diese Höhe am Fuße des Doms ungefähr dem durchschnittlichen Erdradius entspricht. Für den Fehler des Gangunterschiedes finden wir:

$$\delta\Delta T = k\left(\frac{\pi}{\sqrt{l\cdot g_h}} - \frac{\pi}{\sqrt{l\cdot g_0}}\right)\delta l + \\ + \frac{\pi\cdot\sqrt{l}}{\sqrt{g_h^3}}\delta g_h + \frac{\pi\cdot\sqrt{l}}{\sqrt{g_0^3}}\delta g_0 \qquad (13)$$

3. Der Erdradius
Der Erdradius kann mit Hilfe der Beziehung (4) bestimmt werden. Es folgt der Fehler:

$$\delta R = \frac{h}{\Delta T}\delta T_0 + \frac{h\cdot T_0}{\Delta T^2}\delta\Delta T + \frac{T_0}{\Delta T}\delta h \qquad (14)$$

4. Die Erdmasse
Unter Zugrundelegung von (5) ergibt sich die Fehlerabschätzung zu:

Konzeption und Fehlerrechnung für das Projekt: Bestimmung des Erdradius, der Erdmasse und der Erddichte mittels der Pendeluhr von Otto von Guericke

Martin Nischang und Klaus Retzlaff
Astronomische Gesellschaft Magdeburg e.V.

$$\delta M = \frac{8\cdot\pi^2}{f}\frac{h^2\cdot k^2}{\Delta T^3}\delta\Delta T + \frac{8\cdot\pi^2}{f}\frac{h\cdot k^2}{\Delta T^2}\delta h \tag{15}$$

5. Die mittlere Dichte der Erde

Für den Fehler der Messung der mittleren Dichte der Erde folgt unter Verwendung von (6) schließlich:

$$\delta\rho = \frac{3\cdot\pi\cdot\Delta T\cdot k^2}{f\cdot h\cdot T_0^3}\delta l + \frac{3\cdot\pi\cdot l\cdot\Delta T\cdot k^2}{f\cdot h^2\cdot T_0^4}\delta h + \frac{3\cdot\pi\cdot l\cdot k^2}{f\cdot h\cdot T_0^3}\delta\Delta T + \frac{9\cdot\pi\cdot l\cdot\Delta T\cdot k^2}{f\cdot h\cdot T_0^4}\delta T_0 \tag{16}$$

6. Fehlersimulation

Die folgende Computersimulation untersucht die zu erwartenden Effekte sowie die Auswirkungen der einzelnen Fehler auf die gesuchten Ergebnisse. Für die Analyse ist die Betrachtung der Einzelterme von Interesse. Aus diesem Grund wir hier die Übersicht über die Terme in der Tabelle 2 angegeben. Tabelle 1 zeigt die Zuordnung der Terme zu den interessierenden Größen.

Tabelle 1: Zuordnung der Terme zu den Fehlern der Fallbeschleunigung, des Gangunterschiedes, des Erdradius, der Erdmasse und der mittleren Erddichte.

$\delta g_0 = E_0 + E_1$
$\delta g_h = E_2 + E_3$
$\delta\Delta T = E_4 + E_5 + E_6$
$\delta R = E_7 + E_8 + E_9$
$\delta M = E_{10} + E_{11}$
$\delta\rho = E_{12} + E_{13} + E_{14} + E_{15}$

Tabelle 2: Übersicht über die Einzelterme.

Termbezeichnung in der Simulation	Term
E_0	$4\cdot\pi^2\frac{k^2}{T_0^2}\delta l$
E_1	$4\cdot\pi^2\cdot l\frac{k^2}{T_0^2}\frac{\delta T}{T_0}$
E_2	$4\cdot\pi^2\frac{k^2}{T_h^2}\delta l$
E_3	$4\cdot\pi^2\cdot l\frac{k^2}{T_h^2}\frac{\delta T}{T_h}$
E_4	$k\left(\frac{\pi}{\sqrt{l\cdot g_h}}-\frac{\pi}{\sqrt{l\cdot g_0}}\right)\delta l$
E_5	$\frac{\pi\cdot k\cdot\sqrt{l}}{\sqrt{g_h^3}}\delta g_h$
E_6	$\frac{\pi\cdot k\cdot\sqrt{l}}{\sqrt{g_0^3}}\delta g_0$
E_7	$\frac{h}{\Delta T}\delta T_0$
E_8	$\frac{h\cdot T_0}{\Delta T^2}\delta\Delta T$
E_9	$\frac{T_0}{\Delta T}\delta h$
E_{10}	$\frac{8\cdot\pi^2}{f}\frac{h^2\cdot k^2}{\Delta T^3}\delta\Delta T$
E_{11}	$\frac{8\cdot\pi^2}{f}\frac{h\cdot k^2}{\Delta T^2}\delta h$
E_{12}	$\frac{3\cdot\pi\cdot\Delta T\cdot k^2}{f\cdot h\cdot T_0^3}\delta l$
E_{13}	$\frac{3\cdot\pi\cdot l\cdot\Delta T\cdot k^2}{f\cdot h^2\cdot T_0^4}\delta h$
E_{14}	$\frac{3\cdot\pi\cdot l\cdot k^2}{f\cdot h\cdot T_0^3}\delta\Delta T$
E_{15}	$\frac{9\cdot\pi\cdot l\cdot\Delta T\cdot k^2}{f\cdot h\cdot T_0^4}\delta T_0$

Konzeption und Fehlerrechnung für das Projekt: Bestimmung des Erdradius, der Erdmasse und der Erddichte mittels der Pendeluhr von Otto von Guericke

Martin Nischang und Klaus Retzlaff
Astronomische Gesellschaft Magdeburg e.V.

Die Tabelle 3 ergänzt die Auflistung um die Fehlerterme für die Pendellänge gemäß der Beziehung (10).

Tabelle 3: Die Genauigkeit der Pendellänge ist die Crux des Experimentes. Die Tabelle gibt die Fehlerterme an.

E_{16}	$4 \cdot \pi^2 \dfrac{k^2}{T^2} \delta l$
E_{17}	$\dfrac{\hat{g} \cdot T_0}{2 \cdot \pi^2 \cdot k^2} \delta T_0$
Fehler Pendellänge	$\delta l = E_{16} + E_{17}$

Erste vorläufige Ergebnisse der Fehlersimulation

Die ersten Ergebnisse einer Simulation für bestimmte festgelegte Annahmen über die Genauigkeit der Messgrößen sowie der vorausgesetzten geophysikalischen Parameter sind in der folgenden Liste des Computerausdrucks angegeben. Diese List enthält die Computernomenklatur.

Liste 1: Computerausdruck der Simulation, in dieser Liste bedeutet $o = \delta$ und $D = \Delta$. Die Bedeutung der übrigen Größen ist selbstkommentierend.

M = 5.97900000000000E+0024 kg
R = 6.37000000000000E+0006 m
f = 6.67000000000000E-0011 N m^2 / kg^2
Error T = 0.01 s
Error g = 0.000001 m/s^2
Error h = 0.001 m
h = 70.0 m
l = 0.14 m
Zeit = 1.0 Monate
Roh = 5.52232099390985E+0003 kg/m^3
Roh = 5.52232099390985E+0000 g/cm^3
g0 = 9.82823478383021E+0000 m/s^2
gh = 9.82801878223060E+0000 m/s^2
gh-g0 = -2.16001599611732E-0004 m/s^2
tau0 = 7.49904785180876E-0001 s
tauh = 7.49913025892801E-0001 s
Dtau = 8.24071192506460E-0006 s
k = 3.45643880559425E+0006 Takte
T0 = 2.59200000000000E+0006 s
Th = 2.59202848351648E+0006 s
DT = 2.84835164835167E+0001 s
Error l = 1.53249208636097E-0008 m
Error g0 = 1.11375271740544E-0006 m/^2
Error gh = 1.11372782306434E-0006 m/^2
Error DT = 2.93733081329375E-0001 s
Error R = 6.57809378681311E+0004 m
Error M = 8.82045482341191E+0023 kg
Error Roh = 5.69489866916968E+01 kg/m^3
Term E 0 = 0.000010946 %
Term E 1 = 0.000000386 %
Term E 2 = 0.000010946 %
Term E 3 = 0.000000386 %
Term E 4 = 0.000005473 %
Term E 5 = 0.515619414 %
Term E 6 = 0.515613940 %
Term E 7 = 0.000000386 %
Term E 8 = 1.031238827 %
Term E 9 = 0.001428571 %
Term E 10 = 14.731983246 %
Term E 11 = 0.020408163 %
Term E 12 = 0.000010946 %
Term E 13 = 0.000000000 %
Term E 14 = 1.031238827 %
Term E 15 = 0.000001157 %
Term E 16 = 0.000010175 %
Term E 17 = 0.000000772 %

Die Ergebnisse sind aus 2 Gründen vorläufig:
1. Es sind die Formeln und das Computerprogramm noch nicht vollständig auf Richtigkeit geprüft.
2. Unklarheit herrscht im Augenblick über die zugrunde gelegten Input-Größen, insbesondere über die Genauigkeit mit der g für die Eichung bestimmbar ist.

Quellen

[1] Klaus Retzlaff, „Was eine Pendeluhr mit Geo- und fundamentaler Gravitationsphysik verbindet“, Astronomische Gesellschaft Magdeburg, 03/2013