

Computersimulation galaktischer Rotationskurven in verschiedenen Gravitationstheorien

Klaus Retzlaff

Zusammenfassung: Die Eigenschaften des Gravitationsfeldes in einer radialsymmetrischen Scheibe unterscheiden sich wesentlich von den Eigenschaften in einer kugelsymmetrischen Massenverteilung. Heben sich in einer kugelsymmetrischen Verteilung die Gravitationskräfte der Massen außerhalb eines beliebigen gegebenen Abstandes gegenseitig auf, so dass für die Bewegung einer Testmasse nur die Massen innerhalb des jeweiligen Abstandes eine Bedeutung haben, so ist das in einer radialsymmetrischen Massenverteilung in einer Scheibe nicht der Fall. Im ersten Teil dieser Arbeit werden die Unterschiede dieser beiden Fälle auf Basis der Newtonschen Gravitationstheorie und Mechanik untersucht und es wird der Zusammenhang zwischen lokalen radialer Dichtefluktuationen und der Form der Rotationskurve studiert.

Im zweiten Teil werden für bestimmte galaktische radialsymmetrische Scheibengeometrien Rotationskurven auf Basis der Newtonschen Gravitationstheorie (NG, Isaac Newton), der Modifizierten Newtonschen Dynamik (MOND, Mordehai Milgrom) und der Trägheitsfreien Mechanik (TM, Hans-Jürgen Treder) im nicht-relativistischen Grenzfall simuliert und verglichen. Als galaktisches Referenzmodell ist eine Massenverteilung gewählt worden, welche auf Basis der Newtonschen Gravitationstheorie bis zu einem Abstand von 15kpc sowohl die gemessene Rotationskurve als auch die beobachtete Verteilung der sichtbaren Materie korrekt reproduziert, d.h. bereits auf Basis der Newtonschen Gravitationstheorie steht die ermittelte Massendekomposition in Übereinstimmung mit der beobachteten Dichteverteilung unserer Galaxie bis 15 kpc. Dieses nicht selbstverständliche Resultat entspricht der Aussage, dass innerhalb von 15kpc keine Dunkle Materie erforderlich ist, um die Rotation der Milchstraßengalaxie zu erklären. Aussagen, wonach die Geschwindigkeit der Sonne um das Galaktische Zentrum zu hoch sei und folglich auf die Hypothese einer nicht beobachtbaren Dunklen Materie zurückgegriffen werden müsse, erweisen sich als Folge einer Näherung, die zur Abschätzung der galaktischen Masse von einer kugelsymmetrischen Massenverteilung ausgeht. Doch unsere Galaxis ist bekanntlich keine Kugel, sondern eine Scheibe, was schon mit dem bloßen Auge zu sehen ist. Sofern tatsächlich ein kugelsymmetrisches Halo aus Dunkler Materie außerhalb der 15kpc existieren sollte, so ist das auf Grund der Geometrie für den Bereich bis 15kpc ohne Bedeutung. Ein scheibenförmiges äußeres Halo würde die Rotationsgeschwindigkeit innerhalb der Scheibe sogar, wenn auch unwesentlich, absenken.

MOND beschreibt die galaktische Rotation genau dann richtig, wenn statt einer Galaxie mit Bulge und Scheibe eine kugelsymmetrische Massenverteilung benutzt wird. Damit korrigiert MOND gerade den Fehler, der durch die Anwendung einer kugelsymmetrischen Näherung entsteht. Setzt man jedoch die tatsächlich beobachtbare Massenverteilung voraus, so führt MOND auf eine zu hohe Rotationsgeschwindigkeiten für die Sonne und die Sterne in der Galaxis.

Für die gegebene beobachtbare Massendichte ergibt die Trägheitsfreie Mechanik keine signifikanten Unterschiede zur Newton-Einsteinschen Gravitationstheorie in der Milchstraße. Damit besteht kein Konflikt mit der Beobachteten Verteilung der Materie und der Rotationskurve. Dem gegenüber ergeben sich signifikante Unterschiede für extreme Gravitationsfelder. Die Trägheitsfreie Mechanik ergibt eine Selbstabschirmung der Schwerkraft (Suppression der Schwere) im Inneren einer Massenverteilung, erst außerhalb einer solchen Verteilung wird die gesamte Gravitation im Maße der Newtonschen Gravitationstheorie wirksam. Die Folge dieser Suppression der Schwere ist ein langsamerer Abfall der Rotationskurve mit dem Abstand vom Gravitationszentrum als bei der Newton-Einsteinschen Gravitationstheorie.

Einleitung

In der Diskussion um die verschiedenen Phänomene, wie galaktische Rotationskurven, Stabilität von Galaxienhaufen, Gravitationslinsen, kosmische Strukturbildung, werden alternative Lösungsvorschläge zur

Erklärung vorgetragen: Dunkle Materie (DM) versus alternativer Gravitationstheorien oder alternative Dynamiken, wie MOND [1] oder TM [2] zum Beispiel. In dieser Arbeit werden die NG, MOND und TM auf ein einfaches

Computersimulation galaktischer Rotationskurven in verschiedenen Gravitationstheorien

Klaus Retzlaff

Modell der Milchstraßengalaxie angewendet und die Ergebnisse diskutiert. Die Modifizierte Newtonschen Dynamik modifiziert nicht das Gravitationsgesetz, sondern das Trägheitsgesetz. Sie wurde als Alternative zur Annahme so genannter Dunkler Materie entwickelt, wobei ein empirischer Parameter als neue Naturkonstante eingeführt und so normiert wurde, dass MOND die Beobachtungsergebnisse universell reproduzieren soll. Der Autor plädiert für wissenschaftliche Neutralität bezüglich der verschiedenen Theorien. Ein häufig vorgetragener Einwand gegen MOND, dass hier ein Parameter angepasst werde, um die gewünschten Beobachtungsergebnisse zu erhalten, ist nicht stichhaltig, denn immerhin führt MOND diesen Parameter als universelle Naturkonstante ein, so dass MOND die Rotation beliebiger Galaxien korrekt beschreiben soll. Dem gegenüber könnte man gerade das Argument der Parameteranpassung mit vollem Recht gegen die NG bzw. die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) wenden, denn wenn man in jede Galaxie zusätzliche nicht nachgewiesene DM einführt, so ist dieses Verfahren nichts anderes als eine viel gravierendere weil multidimensionale Parameteranpassung. So kann man NG bzw. ART unter allen Umständen passend machen. In diesem Sinne steht eine eindimensionale Parameteranpassung bei MOND einer multidimensionalen Parameteranpassung bei NG/ART gegenüber und in diesem Sinne ist der praktische Test für MOND härter als für die NG, bzw. die ART. Aus diesen Umständen heraus folgt aber überhaupt nichts in Bezug auf Schlussfolgerungen, welche der Theorien denn nun gilt. Letzten Endes drückt sich in der Einführung von DM oder alternativ in der Einführung einer neuen Naturkonstante gemäß MOND nur der Tatbestand aus, dass eine Beobachtung

unverstanden ist und nicht klar ist, ob sie im Rahmen der bekannten etablierten Theorie erklärt werden kann.

Doch der radikalste Bruch mit etablierten theoretischen Vorstellungen geht weder von der Einführung Dunkler Materie noch einer modifizierten Newtonschen Dynamik aus. Den radikalsten Bruch realisiert die Trägheitsfrei Mechanik, in dem sie die Trägheit vollständig auf die Gravitation der kosmischen Materie zurückführt. Sie wurde bereits Ende der 60er, bzw. Anfang der 70er Jahre, des letzten Jahrhunderts aus theoretischen Intensionen heraus entwickelt und nicht, dieses sei hervorgehoben, um eine Theorie mit bestimmten Beobachtungen verträglich zu machen¹, wie es bei MOND und auch bei der Einführung Dunkler Materie der Fall ist. Sie ist die strenge analytische Fassung des so genannten Machschen Prinzips, vergleiche hierzu [3], [4] und [5].

Während Einstein für lange Zeit der Auffassung war, dass das Allgemeine Relativitätsprinzip (Kovarianzprinzip) zusammen mit dem Äquivalenzprinzip von Trägheit und Schwere automatisch das Machsche Prinzip realisieren würde, wiesen Hönl und Dehnen in der Mitte der 60er Jahre auf die Unvereinbarkeit von Machschem Prinzip und Allgemeiner Relativitätstheorie hin [7]. Einstein selbst führte aus Not einen Zusatzterm zusammen mit der kosmologische Konstante Λ in seine Feldgleichung ein, um ein statisches und das Machsche Prinzip realisierendes Universum zu modellieren. Mit der Entdeckung der kosmischen Expansion und den Friedmannschen Lösungen seiner ursprünglichen Feldgleichungen hielt

¹ Der Autor der Trägheitsfreien Mechanik, Hans-Jürgen Treder, wurde von seinem Lehrer, Werner von Heisenberg, dazu angeregt, sich mit diesem Prinzip zu befassen. Treder war dabei zunächst der Überzeugung, dass dieses Prinzip auf eine widersprüchliche Mechanik führen müsse und damit theoretisch nicht haltbar sei. Er bemerkte dann aber die Durchführbarkeit [9].

Computersimulation galaktischer Rotationskurven in verschiedenen Gravitationstheorien

Klaus Retzlaff

Einstein die Einführung dieses Zusatztermterms $+ \Lambda g_{ik}^2$ für unberechtigt [4], [8]. Dieser zusätzliche Term kam mit der Entdeckung der beschleunigten Expansion des Universums 1998 zu neuen Ehren und wurde mit der Vakuumenergie bzw. einer hypothetischen Dunklen Energie in Zusammenhang gebracht.

Die Trägheitsfreie Mechanik ist dagegen weitgehend unbeachtet geblieben, obwohl es schwerwiegende physikalische Gründe gibt, ihre Konsequenzen zu untersuchen. Innerhalb des Planetensystems reproduziert die Trägheitsfreie Mechanik die Einsteins Periheldrehung [5]. Verschwindet das Energieintegral des Kosmos, d.h. gilt $H=0$, folgen die üblichen Friedmannschen Gleichungen, für $H>0$ ergibt sich automatisch eine beschleunigte Expansion des Universums [10]. Es sei angemerkt, dass die beschleunigte Expansion des Universums erst 1998 von dem US-Amerikaner Saul Perlmutter und dem Australier Brian Schmidt entdeckt wurde, also 16 Jahre nach Treders Publikation. Die Trägheitsfreie Dynamik löst das Singularitätsproblem der Einsteinschen Allgemeinen Relativitätstheorie. Die Trägheit ist streng isotrop³. Entgegen den üblichen Vorstellungen wenden sich die experimentellen Befunde, welche die Isotropie der Trägheit mit hoher Genauigkeit nachweisen [12] gegen die Allgemeine Relativitätstheorie und streng genommen gegen alle metrischen Theorien der Gravitation. Bei Hughes, siehe [12],

wird das Machsche Prinzip durch die Einführung eines Weberschen Potentials moduliert. Die Anisotropie ergibt sich dabei auf Grund des Weberschen Potentials, nicht auf Grund des Machschen Prinzips und das war Hughes Irrtum. Vermutlich ist das einer der Gründe, warum das Machsche Prinzip aus dem Blickfeld des physikalischen Interesses verschunden ist. Daher wird es in diesem Artikel erforderlich sein zu zeigen, wie metrische Theorien die Isotropie der Trägheit zwangsläufig verletzen, auch wenn das nicht das zentrale Thema dieser Arbeit ist. Es wird gezeigt, dass die Isotropie der Trägheit in metrischen Theorien eben nur für geodätische Bewegungen gilt.

Ein anderer Einwand gegen das Machsche Prinzip ergibt sich aus dem Tatbestand der Fernwirkung der Trägheitsinduktion. Treder verweist aber zu Recht darauf, dass die D'Alambertschen Trägheitskräfte ein Ausdruck dafür sind, dass ein N-Partikelsystem nicht im gewöhnlichen Riemannschen Raum geometrisierbar ist. Die aus dem Hertzschen Konfigurationsraum resultierenden Scheinkräfte sind das Analogon zu dem Potential gemäß DE Broglie und Bohm [6], [13], [14]. Der Fernwirkungscharakter der Mach-Einsteinschen Trägheitsinduktion führt zum Hertzschen Konfigurationsraum und so zeigen die Trägheitskräfte direkt an, in wie weit das in Bezug auf den gewöhnlichen Raum formulierte Lokalitätspostulat im Sinne von Herz und Einstein ungültig ist, vergleiche hierzu [6], Seite 39. Gemäß Treder, bzw. der Trägheitsfreien Mechanik drücken die Trägheitskräfte unmittelbar die physikalische Realität des Konfigurationsraums aus. Auf Grund dieser Tatsache steht die Trägheitsfreie Mechanik der Quantentheorie näher als die Newton-Einsteinsche Gravitationstheorie. Man denke an das Einstein-Podolsky-

² g_{ik} sind hier die Komponenten des metrischen Tensors mit $i, k = 0...3$.

³ Noch in modernen Lehrbüchern über Kosmologie ist zu lesen, dass es ein Problem des Machschen Prinzips sei, dass die experimentell mit extrem hoher Genauigkeit bestätigte Isotropie der Trägheit vermutlich verletzt sei [11]. Dieser Einwand ist spätestens seit 1972, also seit der Publikation der Trägheitsfreien Mechanik, überholt und kann nicht mehr gegen das Machsche Prinzip geltend gemacht werden.

Computersimulation galaktischer Rotationskurven in verschiedenen Gravitationstheorien

Klaus Retzlaff

Rosen-Paradoxon [15], welches die Nichtlokalität der Quantenmechanik konstatiert. Vor diesem Hintergrund kann es sein, dass das Machsche Prinzip einen natürlichen Weg zur Vereinigung von Quantentheorie und Gravitation ebnet.

Die Trägheitsfreie Mechanik ist eine klassische Theorie (wegen $v \ll c$), wie die Newtonsche Mechanik. So, wie letztere der klassische Grenzfall der Allgemeinen Relativitätstheorie ist, so ist die Trägheitsfreie Mechanik der Grenzfall der Einstein-Mayer-Theorie, siehe hierzu [16] bis [20]. Aber auf der anderen Seite ist die Newtonsche Mechanik ein Grenzfall der Trägheitsfreien Mechanik, wenn für die Gesamtmasse des Universums $M_{Kosmos} \rightarrow \infty$ gilt. So wie die Newtonsche Theorie berechtigt ist, die galaktische Rotation zu beschreiben, so gilt dieses weit mehr für die Trägheitsfreie Mechanik⁴ und die nicht relativistische Modifizierte Newtonsche Dynamik. Vor diesem Hintergrund erscheint (wegen $v \ll c$) eine klassische Behandlung der galaktischen Rotation unproblematisch.

1. Modellierung der Galaxis

Für die Simulation der galaktischen Rotationskurven wurden ein zweidimensionales und ein dreidimensionales Modell gewählt.

Die Wahl des zweidimensionalen Modells (2D-Modell) erwies sich auf Grund der verfügbaren Rechnerkapazitäten als notwendig. Dies hängt damit zusammen, dass in der Trägheitsfreien Mechanik nicht nur die Koordinatendifferenzen eingehen, sondern zusätzlich die Differenzgeschwindigkeiten der Partikel. Für einen Vergleich der Theorien im Rahmen der Simulation ist die Beschränkung auf eine zweidimensionale Scheibe nicht nur unwesentlich, sondern

⁴ Die Trägheitsfreie Mechanik beschreibt ja bereits in diesem Fall die Einsteinsche Periheldrehung korrekt.

nützlich. Die Beschränkung auf 2 Dimensionen führt aus geometrischen Gründen zu einer maximalen Kraftwirkung zwischen den Partikeln. So erhält man eine untere Grenze für die Masse der Galaxie. Größere Massen ergeben sich im 3D-Modell und durch Hinzufügen eines zusätzlichen galaktischen kugelsymmetrischen Halos. Ein galaktisches Halo wird jedoch in dieser Arbeit nicht untersucht. Wie sich bei der Simulation des 3D-Modells zeigt, ist bei Zugrundlegung der beobachtbaren Materieverteilung bis 15kpc eine zusätzliche hypothetische kugelsymmetrische Komponente, z.B. aus Dunkler Materie, unnötig, um die beobachtbare Massenverteilung zu beschreiben. Allein die Wahl der richtigen Scheinengeometrie ergibt ein Massenverteilung in Einklang mit der Beobachtung und der Newton-Einsteinschen Theorie sowie der Trägheitsfreien Mechanik⁵.

1.1 2D-Modell der Galaxie

Im 2D-Modell werden wesentliche Vereinfachungen vorgenommen. Die einzelnen Partikel befinden sich ausschließlich in einem 2-dimensionalen Bulge⁶ und einer ebenso 2-dimensionalen

⁵ Unterschiede beider Theorien werden aber ebenfalls im Verlauf dieser Arbeit diskutiert. Diese ergeben sich bei starken lokalen Gravitationsfeldern oder bei einer deutlichen Verkleinerung des kosmischen Gravitationspotentials.

⁶ Die Rede von einem 2-dimensionalen Bulge erscheint auf den ersten Blick als Widerspruch zum Begriff Bulge, was übersetzt Ausbuchtung heißt, ein Bulge in einer Scheibe also nicht 2-dimensional sein kann. Hier ist aber eine besondere Verdichtung der Massenkonzentration in dem Bereich der galaktischen Scheibe gemeint, wo sich im 3-dimensionalen Fall der galaktische Bulge befindet. Es ist zu beachten, dass diese 2-Dimensionalität des Bulge das übliche de Vaucouleurs-Profil modifiziert. Die Eigenschaft eines 3-dimensionalen Bulge ist mathematisch einer 2-dimensionalen Konstruktion aufgezungen. Daher wird in der

Computersimulation galaktischer Rotationskurven in verschiedenen Gravitationstheorien

Klaus Retzlaff

Scheibe. Die Positionen der Partikel werden durch die Ortsvektoren:

$$\vec{r}_i = r_i \begin{pmatrix} \cos \varphi_i \\ \sin \varphi_i \end{pmatrix} \quad (\text{A1})$$

beschrieben, wobei sich der Koordinatenursprung im Zentrum der Galaxis befindet. Die Bahnen der Partikeln sind stets Kreisbahnen:

$$\dot{r}_{radial} = \frac{d}{dt} |\vec{r}_{i,radial}| = 0 \quad (\text{A2})$$

Es gilt für die Geschwindigkeit:

$$\dot{\vec{r}}_i = r_i \dot{\varphi}_i \begin{pmatrix} -\sin \varphi_i \\ \cos \varphi_i \end{pmatrix} \quad (\text{A3})$$

und für die Beschleunigung:

$$\ddot{\vec{r}}_i = -r_i \dot{\varphi}_i^2 \begin{pmatrix} \cos \varphi_i \\ \sin \varphi_i \end{pmatrix} \quad (\text{A4})$$

Aus Symmetriegründen sind die Tangentialgeschwindigkeiten für einen gegebenen Abstand r vom Zentrum gleich groß, d.h. $|\vec{v}_{i,T}(\vec{r}_i)| = v_T(r)$ und es gilt:

$$v_T(r) = \dot{\varphi}(r) \cdot r \quad (\text{A5})$$

Diese Bedingungen unterstellen eine radialsymmetrische Massenverteilung. Es erfolgt eine Näherung der Massenverteilung in Form eines quadratischen Koordinatengitters mit einer Gitterkonstante von 200 pc, die sich innerhalb eines Radius von 15 kpc befindet. Das sind 17396 Punkte. Die Punktmenge ist hinreichend dicht⁷. Die Punkte werden entsprechend bestimmter radialsymmetrischer Verteilungsfunktionen mit aktiven schweren Massen belegt. Diese Verteilungsfunktionen sind je nach Bereich (Bulge oder Scheibe) unterschiedliche Funktionen. Die Funktionen enthalten gewisse Parameter (A_1, \dots, A_4), die so gewählt wurden, dass sie für den Fall der Newtonschen Gravitationstheorie die

beobachtete Rotationskurve der Milchstraßengalaxie angenähert reproduzieren. Für den Bulge ist das die Funktion:

$$\zeta_{Bulge}(r) = A_1 e^{-A_2 g(r)}, \text{ mit } g(r) = r^8 \quad (\text{A6})$$

und für die Scheibe ($r > r_{Bulge}$) gilt:

$$\zeta_{Disk}(r) = A_3 (e^{q(r)} - e^{q(r_{Galaxie})}) \text{ mit}$$

$$q(r) = -\frac{r}{A_4} \quad (\text{A7})$$

Auf Grund der strengen Zweidimensionalität unterscheiden sich diese Verteilungsfunktionen etwas von den üblichen Profilen. Das ist unproblematisch, weil es bei dem 2D-Modell auf den Vergleich der Gravitationstheorien ankommt und nicht um eine exakte Rekonstruktion der Struktur der Milchstraßengalaxie.

Am Übergang von der Bulge- zur Scheibenregion gilt die Kontinuitätsbedingung:

$$\zeta_{Bulge}(r = r_{Bulge}) = \zeta_{Disk}(r = r_{Bulge}) \quad (\text{A8})$$

Auf Grund dieser Kontinuitätsbedingung reduziert sich die Parameteroptimierung um eine Dimension.

Massen in der lokalen galaktischen Nachbarschaft aber außerhalb der galaktischen Scheibe ($r > r_{Galaxie} = 15kpc$) werden vernachlässigt. Die Sprechweise von der lokalen galaktischen Nachbarschaft ist für die Trägheitsfreie Mechanik von wesentlicher Bedeutung, denn die fernen kosmischen Massen tragen hauptsächlich zur Trägheitsinduktion bei. Das ist ja gerade das Wesen des Machschen Prinzips. Diese kosmischen Massen gehen über das gemittelte kosmische Gravitationspotential mit

$$|\phi_{Kosmos}| = \frac{1}{3} c^2 \text{ in das Modell ein}^8.$$

Folge auch von einem 2-dinsionalem Bulge gesprochen.

⁷ Eine Vergrößerung der Punktdichte verändert die Ergebnisse der Simulation nicht.

Klaus Retzlaff, Cochstedt, 01/2013

⁸ Die Begründung für diese Wahl erfolgt im Rahmen der Darstellung der Trägheitsfreien Mechanik im Kapitel 2.3.

Computersimulation galaktischer Rotationskurven in verschiedenen Gravitationstheorien

Klaus Retzlaff

Während die Parameter A_1, \dots, A_4 die Funktionen spezifizieren, sind für den Vergleich der Simulationen die galaktischen Parameter wie Bulge-Radius und Galaxien-Masse den empirischen Beobachtungsdaten optimal angepasst worden. Als empirische Basis der Simulation wurden die Daten von Honma und Sofue sowohl im 2D-Modell also auch im 3D-Modell herangezogen [21].

1.2 3D-Modell der Galaxie

Während im 2D-Modell vor allem die quantitativen Unterschiede der Gravitationstheorien untersucht werden, ist das 3D-Modell mehr realistisch. Im 3D-Modell wird vor allem 4 Fragestellungen nachgegangen:

1. Welche Rolle spielt die Geometrie der Galaxis für die Rotationskurven?
2. Kann die Rotationskurve der Milchstraßengalaxie in einem Bereich bis 15kpc in Einklang mit der beobachteten Dichteverteilung der sichtbaren Materie simuliert werden?
3. Welcher Anteil Dunkler Materie innerhalb der sichtbaren Scheibe ist erforderlich, um die Rotationskurve zu reproduzieren?
4. Beschreibt die Modifizierte Newtonsche Dynamik die Rotation der Milchstraßengalaxie richtig?

Entsprechend diesen 4 Fragestellungen ist das 3D-Modell flexibler konstruiert. So wird die Scheibe durch einen Rotationsellipsoiden und der Buge durch eine Kugel beschrieben. Das Rotationsellipsoid kann von der Kugelform bis zu einer sehr flachen Scheibe in der Form verändert werden. Abbildung 1 zeigt die realistische Geometrie der Galaxis:

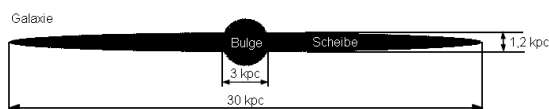


Abbildung 1: Geometrische Form der Modell-Galaxie, Bulge-Durchmesser = 3 kpc, Scheibendurchmesser = 30 kpc, maximale Dicke der Scheibe = 1,2 kpc.

Die Verteilung der Koordinaten der Massenpunkte erfolgt nicht wie im 2D-Modell auf einem quadratischen, bzw. auf einem Würfelgitter, sondern stochastische gleichmäßig verteilt, wobei zur Unterdrückung lokaler Effekte ein Mindestabstand der Positionen gesichert wird. Die Massenverteilung erfolgt wiederum radialsymmetrisch, allerdings nicht unter Bezugnahme auf parameterabhängige analytische Funktionen, vielmehr werden im Abstand von 1 kpc entlang des Radius Stützstellen festgelegt, die eine bestimmte Masse repräsentieren. Zwischenwerte zwischen den Stützstellen werden linear interpoliert. Auf diese Weise gelingt eine ideale Anpassung der simulierten Rotationskurve an die gemessene Kurve gemäß Honma und Sofue [21].

Es ist bekannt, dass sich im Zentrum der Galaxis ein supermassiver Körper⁹ befindet, aus diesem Grund ist im Zentrum ($r=0$) ein entsprechend massiver Körper platziert. Auf Grund der Fragestellung unter Punkt 1 und Punkt 2 enthält das Modell kein galaktisches Halo. Es ist damit ein 3-komponentiges Modell bestehend aus Zentralmasse, Bulge und Scheibe.

2. Theoretische Grundlagen

2.1 Newtonsche Gravitationstheorie

⁹ In der Literatur ist die Redeweise von einem zentralen Schwarzen Loch. Diese Redeweise unterstellt eine Gravitationstheorie, in der Schwarze Löcher existieren. Nach der Trägheitsfreien Mechanik sind extreme Dichten möglich, aber ohne dass ein Gravitationskollaps zu einem Schwarzen Loch führt. Das wird durch die Suppression der Schwere verhindert und damit gerade das Singularitätsproblem der Einsteinschen Gravitationstheorie gelöst. Darum wird in dieser Arbeit nur von einem supermassiven Objekt gesprochen.

Computersimulation galaktischer Rotationskurven in verschiedenen Gravitationstheorien

Klaus Retzlaff

In der Newtonschen Gravitationstheorie ist die Lagrange-Funktion eines N-Partikelsystems durch:

$$L = T - U = \sum_{i=1}^N T_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N U_{ij} \quad (\text{B1})$$

bzw.

$$L = \sum_{i=1}^N m_i \frac{v_i^2}{2} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \sum_{j \neq i}^N \frac{f m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (\text{B2})$$

gegeben. Der erste Term beschreibt die kinetische Energie und repräsentiert den Trägheitsterm einer Teilchenwolke. Durch den zweiten Term ist die gravitative Wechselwirkung der N Partikel erfasst. Mit (1) sind die kanonischen Impulse:

$$\vec{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = m_i \vec{v}_i \quad (\text{B3})$$

bestimmt, die Trägheitskraft ist damit:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = \frac{d}{dt} \vec{p}_i = m_i \vec{a}_i \quad (\text{B4})$$

wenn die Trägheitsmassen m_i als zeitlich unveränderlich angenommen werden und

$\vec{a}_i = \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i$ als Beschleunigung des i-ten Teilchens definiert ist.

Die Gravitationskraft, die auf einen Partikel i wirkt, ist:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} \sum_{j \neq i}^N U_{ij} = m_i \sum_{j \neq i}^N \frac{f m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \quad (\text{B5})$$

und es folgen die Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$m_i \frac{d^2}{dt^2} \vec{r}_i - \frac{1}{2} m_i \sum_{j \neq i}^N \frac{f m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 0 \quad (\text{B6})$$

Von Interesse ist der Kraftterm für den Vergleich der Theorien im 2D-Modell. Mit den elementaren Beziehungen dieses Modells gemäß (A1), (A2), (A3) und (A4) findet man für die Newtonsche Gravitationskraft:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{i,Newton} = f m_i \sum_{j \neq i}^N \frac{m_j}{r_{ij}^3} r_i \begin{pmatrix} \cos \varphi_i \\ \sin \varphi_i \end{pmatrix} - \\ - f m_i \sum_{j \neq i}^N \frac{m_j}{r_{ij}^3} r_j \begin{pmatrix} \cos \varphi_j \\ \sin \varphi_j \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B7})$$

mit $r_{ij} = |\vec{r}_i - \vec{r}_j|$.

Betrachtet man die radiale Projektion so ergibt sich:

$$\begin{aligned} F_{i,Newton}^{radial} = f m_i \sum_{j \neq i}^N \frac{m_j}{r_{ij}^3} r_i - \\ - f m_i \sum_{j \neq i}^N \frac{m_j}{r_{ij}^3} r_j g_{ij} \end{aligned} \quad (\text{B8})$$

mit $g_{ij} = \sin \varphi_i \sin \varphi_j + \cos \varphi_i \cos \varphi_j$ ¹⁰.

Wählt man nun für eine Testmasse die spezifische Winkelposition $\varphi_i = 0$ aus, so verkürzt sich g_{ij} zu: $g_{ij} = \cos \varphi_j$ und die radiale Kraftkomponente wird zu:

$$F_{i,Newton}^{radial} = f m_i \sum_{j \neq i}^N \frac{m_j}{r_{ij}^3} (r_i - r_j \cos \varphi_j) \quad (\text{B9})$$

Eben dieser Ausdruck (B7) wird später für die Interpretation im Rahmen des Vergleichs der Gravitationstheorien benötigt.

Bleibt noch die tangentielle Komponente zu betrachten:

$$F_{i,Newton}^{tangential} = f m_i \sum_{j \neq i}^N \frac{m_j}{r_{ij}^3} r_j \tilde{g}_{ij} \quad (\text{B10})$$

mit $\tilde{g}_{ij} = \sin \varphi_i \cos \varphi_j - \cos \varphi_i \sin \varphi_j$. Für die spezifische Position der Testmasse verkürzt sich $\tilde{g}_{ij} = -\sin \varphi_j$ und (B10) zu:

$$F_{i,Newton}^{tangential} = -f m_i \sum_{j \neq i}^N \frac{m_j}{r_{ij}^3} r_j \sin \varphi_j \quad (\text{B11})$$

Sowohl (B9), als auch (B11) sind spezifische Darstellungen für die Kraftkomponenten in ebenen Polarkoordinaten (Scheibenkoordinaten). Spezifisch ist diese Darstellung aber nur hinsichtlich der Wahl der Winkelposition

¹⁰ Es handelt sich hier bei g_{ij} nur um eine Hilfsfunktion und nicht um den Metrischen Tensor.

Computersimulation galaktischer Rotationskurven in verschiedenen Gravitationstheorien

Klaus Retzlaff

der Testmasse. Die Ausdrücke enthalten jedoch noch keine Spezifikation hinsichtlich der Massenverteilung. In diesem Sinne sind sie immer noch allgemeingültige Formen für beliebige Massenverteilungen.

Um zu untersuchen, wie sich (B9) und (B11) für den Fall einer radialsymmetrischen Verteilung verändern, helfen geometrische Betrachtungen. Doch zunächst sind einige Umformungen erforderlich. In einer radialsymmetrischen Verteilung sind die Massen in einem gegebenen Abstand vom Zentrum, d.h. die Massen auf einem Kreisring für jede Winkelposition gleich groß. Daher kann man die Summationen über alle Teilchen N so ausführen, dass man zunächst die Massen der einzelnen Kreisringe berechnet und dann alle Kreisringmassen addiert, zunächst wird (B9) betrachtet:

$$F_{i,Newton}^{radial} = fm_i \sum_{\text{Kreisringe } j \in \text{Kreisring}} \sum_{\text{Kreisring}} \frac{m_j}{r_{ij}^3} r_i - fm_i \sum_{\text{Kreisringe } j \in \text{Kreisring}} \sum_{\text{Kreisring}} \frac{m_j}{r_{ij}^3} r_j \cos \varphi_j \quad (\text{B12})$$

Der erste Term in (B12) ist für die weiteren Betrachtungen uninteressant, da er keine Winkelfunktion enthält. Daher wird nur der 2. Term betrachtet. Dieser Ausdruck läßt sich nun wie folgt umformen:

$$- fm_i \sum_{\text{Kreisringe}} m(r)r \sum_{j \in \text{Kreisring}} \frac{\cos \varphi_j}{r_{ij}^3} \quad (\text{B13})$$

mit der Masse $m(r) = m_j$ des jeweiligen Kreisrings mit dem Radius r . An der Beziehung (B13) sieht man, dass die Summe über alle Winkel φ_j des Kreisrings laufen muss. Da die Verteilung der Massenpunkte als hinreichend dicht angenommen wird, kommen alle Winkel zwischen 0 und 2π vor und das bedeutet, das sowohl negative als auch positive Terme auftreten.

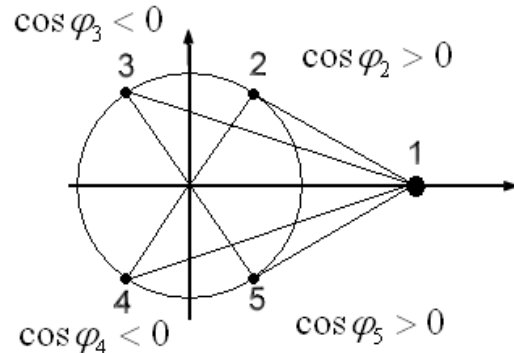


Abbildung 2: Die Wirkung der Massen 2 bis 5 auf die Testmasse 1.

Die Abbildung 2 macht deutlich, dass sich diese Terme nicht zu Null kompensieren, denn obwohl die Massen auf dem Kreisring an jedem Punkt die gleiche Größe haben, so gehen sie mit unterschiedlichem Gewicht ein, da die Abstände $r_{13} = r_{14}$ größer als die Abstände $r_{12} = r_{15}$ sind. Das bedeutet, dass (B9) auch im Falle der Radialsymmetrie seine Form behält.

Ganz anders verhält es sich bei der tangentialen Komponente:

$$- fm_i \sum_{\text{Kreisringe}} m(r)r \sum_{j \in \text{Kreisring}} \frac{\sin \varphi_j}{r_{ij}^3} \quad (\text{B14})$$

Betrachtet man für die gleichen Positionen wie in Abbildung 2 die Sinuswerte, folgt: $\sin \varphi_2 = -\sin \varphi_5$ sowie $\sin \varphi_3 = -\sin \varphi_4$.

Damit findet sich allgemein zu jedem Beitrag eines Massenpunktes auf dem Kreisring ein Beitrag eines anderen Massenpunktes, der den ersteren exakt kompensiert. Daraus folgt unmittelbar:

$$F_{i,Newton}^{tangential} = 0 \quad (\text{B15})$$

So wie es sein muss, treten keine tangentialen Kräfte auf. Obwohl das von vornherein klar war, ist dieses Resultat wichtig, weil es sich auf komplizierte mathematische Formen übertragen lässt und man dann nur darauf achten muss, ob in den entsprechenden Termen Faktoren $\sin \varphi_j$ in der ersten Potenz auftreten.

Computersimulation galaktischer Rotationskurven in verschiedenen Gravitationstheorien

Klaus Retzlaff

2.2 Modifizierte Newtonsche Dynamik

2.3 Trägheitsfreie Mechanik

2.3.1 Newtonschen Mechanik, Allgemeinen Relativitätstheorie und Trägheitsfreien Mechanik

Die Trägheitsfreie Mechanik gehört zu den wenig bekannten Theorien der Physik. Aus diesem Grunde wird sie hier etwas ausführlicher dargelegt¹¹.

Dem Machschen Prinzip liegen 3 Erfahrungstatsachen zugrunde:

1. Die Rotation der Erde, bzw. die Rotation jedes anderen Systems, ist durch die Bezugnahme auf den Fixsternhimmel¹² bestimmbar.
2. Die Rotation der Erde ist dynamisch durch die Beobachtung der Präzession des Foucaultschen Pendels bestimmbar.
3. Die mit den beiden physikalisch völlig unabhängigen Methoden bestimmten Winkelgeschwindigkeiten sind exakt gleich.

Ernst Mach sprach die Vermutung aus, dass diese Gleichheit nicht zufällig sei und dass der Fixsternhimmel das Trägheitsverhalten hervorruft [3].

Die Beobachtungen sind weder in der Newtonschen Mechanik noch in der Einsteinschen Allgemeinen Relativitätstheorie erklärt. In der Newtonschen Mechanik ist die Ursache der Trägheit als eine Folge der Wirkung des absoluten Raumes zu sehen. Das findet

seinen unmittelbaren Ausdruck im Trägheitsterm der Lagrange-Funktion eines freien Teilchens:

$$L = T = \frac{1}{2} m \vec{v}^2 = \frac{1}{2} m \eta_{ik}^{(3)} \dot{x}^i \dot{x}^k \quad (D1)$$

geschrieben mit den ortsunabhängigen Komponenten des metrischen Tensors des ebenen dreidimensionalen Raumes¹³. Die Lagrange-Funktion (D1) führt auf die Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$m \dot{v}_i = m \eta_{ik}^{(3)} \ddot{x}^k = 0$$

bzw.

$$\dot{v}_i = \eta_{ik}^{(3)} \ddot{x}^k = 0. \quad (D2)$$

Dass in (D2) die Trägheitsmasse die Bewegung nicht bestimmt, verweist auf die Bedeutung der Raumstruktur als Führungsfeld im Sinne von Weyl [24].

In der Einsteinschen Allgemeinen Relativitätstheorie lebt, entgegen Einsteins ursprünglicher Hoffnung, Newtons absoluter Raum in modifizierter Form fort. Dieser Tatbestand findet seinen relativistischen Ausdruck in der Bewegungsgleichung¹⁴:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = 0 \quad (D3)$$

Diese Gleichung besagt, dass in der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht der Raum als physikalisch wirkendes Objekt eliminiert ist, wie es Mach und Einstein ursprünglich vorschwebte, sondern es ist gemäß dem Äquivalenzprinzip von Trägheit und Schwere der Begriff der passiven schweren Masse physikalisch gegenstandslos geworden, indem die Bewegung eines Teilchens in einem Gravitationsfeld auf eine geodätische Bewegung in einer 4-dimensionalen Riemannschen Raum-Zeit-Welt zurückgeführt wird. Die Bewegungsgleichung des freien Teilchens

¹¹ Man vergleiche hierzu „Die teleskopischen Prinzipien der Gravodynamik“ (Kapitel II) und „Die Hamiltonschen Bewegungsgleichungen der Trägheitsfreien Mechanik“ (Kapitel III) in [22] aus denen im Folgenden hauptsächlich zitiert wird. Einen sehr schönen historischen Überblick über die Entwicklungen der physikalischen Vorstellungen beginnend bei Galilei bis Einstein hin zum Machschen Prinzip sowie eine Geometrisierung der Trägheitsfreien Mechanik findet man in [6].

¹² Heute würde man den Galaxienhimmel zitieren.
Klaus Retzlaff, Cochstedt, 01/2013

¹³ Es gilt hier die Summenkonvention Einsteins für ko- und kontravariante Indizes, das sind hier keine Teilchennummern.

¹⁴ hier 4-dimensional und mit den Christoffelsymbolen

Computersimulation galaktischer Rotationskurven in verschiedenen Gravitationstheorien

Klaus Retzlaff

gemäß (D3) ist die relativistische Verallgemeinerung von (D2). In diesem Sinne hat der 4-dimensionale Raum der Allgemeinen Relativitätstheorie einen absoluten Charakter¹⁵. Im Grunde genommen ist (D3) das allgemein-relativistische Analogon zum 1. Axiom der Newtonschen Mechanik mit dem die spezielle Galilei-Gruppe:

$$x'_i = x_i + v_i^o t \text{ mit } v_i^o = \text{const.} \quad (\text{D5})$$

verbunden ist. Die träge Masse m_T erscheint im 2. Newtonschen Axiom:

$$F_i = m_T \eta_{ik}^{(3)} \ddot{x}^k \quad (\text{D6})$$

und parametrisiert die Kopplung eines Teilchens an das Führungsfeld. Auch dazu gibt es das relativistische Analogon:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{kl}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^l}{ds} = K^i \quad (\text{D7})$$

Eine äußere Kraft bewirkt eine Abweichung von der geodätischen Bewegung. In diesem Sinne ist die Allgemeine Relativitätstheorie Einsteins Newtonisch. Dabei war Einstein ein Kritiker des Newtonschen Raumkonzeptes: „Es bestehen gegen diese gewohnten Auffassungen des Raumkonzeptes¹⁶ schwerwiegende Bedenken. Erstens widerstrebt es dem wissenschaftlichen Verstand, ein Ding zu setzen (nämlich das zeiträumliche Kontinuum), was zwar wirkt, auf welches aber nicht gewirkt werden kann. ... Zweitens aber weist die klassische

¹⁵ Historische ist es bemerkenswert, dass der Name „Allgemeine Relativitätstheorie“ Einsteins Hoffnung ausdrückt, mit seiner Gravitationstheorie eine Theorie der Relativität der Beschleunigung gefunden zu haben, in der alle Bezugssysteme gleichberechtigt seien. Einstein selbst sah dies durch das Allgemeine Kovarianzprinzip verwirklicht. Fock machte auf dem Einstein-Symposium 1965 in Berlin darauf aufmerksam, dass von einer „Allgemeinen Relativität“ jedoch nicht die Rede sein könne, da Relativitäten auf Symmetrien beruhen, diese aber in einem Riemann-Raum eher eingeschränkt seien und man physikalisch sauber zwischen Bezugssystemen und Koordinatensystemen unterscheiden müsse[23].

¹⁶ „tempus absolutum, spatium absolutum“

Klaus Retzlaff, Cochstedt, 01/2013

Mechanik einen Mangel auf, der direkt dazu auffordert, das Relativitätsprinzip auf relativ zueinander ungleichförmig bewegte Bezugsräume zu beziehen.“ A. Einstein [4], Seite 58.

Einstein bezeichnete das als allgemeines Relativitätsprinzip, er sah im Äquivalenzprinzip von Trägheit und Schwere die physikalische Rechtfertigung und im allgemeinen Kovarianzprinzip die mathematische adäquate Formulierung dafür. Tatsächlich ist die Allgemeine Relativitätstheorie keine Überwindung des Newtonschen Raumkonzeptes, sondern lediglich¹⁷ eine Modifikation:

1. Ersetzung der Fernwirkung durch Nahwirkung im Sinne einer feldtheoretische Konzeption
2. Ersetzung der Invarianz gegenüber der speziellen Galilei-Gruppe durch die lokale Lorentz-Kovarianz für alle physikalischen Felder, inklusive der Gravitation¹⁸.

Eine Mechanik, in der sich die Trägheit als Folge der Beschleunigung gegenüber den kosmischen Partikeln (Indizes A,B) geltend macht, erfordert, dass nur Relativgrößen physikalisch bedeutsam sein dürfen [25], d.h. relative Orte, relative Geschwindigkeiten und relative Beschleunigungen:

$$x_{AB}^i = x_A^i - x_B^i \quad (\text{D8})$$

$$\dot{x}_{AB}^i = \dot{x}_A^i - \dot{x}_B^i \quad (\text{D9})$$

$$\ddot{x}_{AB}^i = \ddot{x}_A^i - \ddot{x}_B^i \quad (\text{D10})$$

¹⁷ Das muss ja überhaupt kein Mangel sein, wenn das theoretische Konzept der Allgemeinen Relativitätstheorie den dargestellten Gegenstand korrekt abbildet. Das aber ist die Frage. Im Anschluss an die allgemeinen Darlegungen wird gezeigt, wie die Allgemeine Relativitätstheorie den empirisch hoch präzise festgestellten Tatbestand der Isotropie der Trägheit verletzt.

¹⁸ Das führt zusammen mit den Äquivalenzprinzipien und der Forderung, die Feldgleichungen für die Gravitation auf Gleichungen mit Ableitungen 2. Ordnung zu beschränken auf die Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation.

Computersimulation galaktischer Rotationskurven in verschiedenen Gravitationstheorien

Klaus Retzlaff

und nicht die absoluten kinematischen Größen¹⁹ $x_A^i, x_B^i, \dots, \dot{x}_A^i, \dot{x}_B^i$ selbst.

Auf Grund der Homogenität und Isotropie des Raumes sind (D8) und (D9) in der Newtonschen Mechanik realisiert, nicht jedoch (D10), was im 2. Axiom (D6) zum Ausdruck kommt. Das ist eine unmittelbare Folge des kinetischen Terms in (D1).

Das Machsche Prinzip führt die Trägheit auf die Gravitationswirkung der kosmischen schweren Massen zurück und entsprechend sind Beschleunigungen Relativbeschleunigungen. Gemäß Poincare haben in einer einem dynamischen Relativitätsprinzip genügenden Mechanik ausschließlich die relativen Größen x_{AB}^i , \dot{x}_{AB}^i und \ddot{x}_{AB}^i einzugehen [25], hierzu auch [5] und [6].

Die Modulierung des Machschen Prinzips gelingt durch die Eliminierung des Trägheitsterms aus der Lagrange-Funktion und die Einführung eines geschwindigkeitsabhängigen Riemannschen Potentials²⁰:

$$L = \sum_{A>B}^N \sum_B^N f \frac{m_A m_B}{r_{AB}} \left(1 + \beta \frac{v_{AB}^2}{c^2}\right) \quad (D11)$$

Die Größe β ist eine dimensionslose neue Naturkonstante, sie parametrisiert die Stärke der Trägheitsinduktion. Mit $\beta = \frac{3}{2}$ folgt exakt die Einsteine

Periheldrehung als lokaler Effekt der Trägheitsinduktion.

¹⁹ Es wird die Notation aus [6] verwendet, um den Vergleich zu erleichtern, i bezeichnet die Koordinate, A und B das Teilchen.

²⁰ Theoretisch wäre auch die Einführung eines Weberschen Potentials möglich, das führt jedoch zu einer Anisotropie der Trägheitsmasse. Im Zusammenhang mit der Geometrisierung und Retardierung der Gravitation verweise ich auf [6], denn bei gleichzeitiger Einführung von Retardierung und Weberschem Potential bleibt die Isotropie der Trägheit erhalten.

Die Vakuumlichtgeschwindigkeit c ist aus formalen Gründen von Treder eingeführt worden, um den Vergleich mit der allgemeinen Relativitätstheorie zu erleichtern, eine andere Bedeutung hat sie nicht.

2.3.2 Die Euler-Langrang-Gleichungen der Trägheitsfreien Mechanik

Mit der Lagrange-Funktion (D11) findet man für die Kraft auf einen Partikel A:

$$\vec{F}_A = \sum_{B \neq A}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_{AB}}$$

$$\vec{F}_A = - \sum_{B \neq A}^N f \frac{m_A m_B}{r_{AB}^3} \vec{r}_{AB} \left(1 + \beta \frac{v_{AB}^2}{c^2}\right) \quad (E1)$$

Der kanonische Impuls:

$$\vec{p}_A = \sum_{B \neq A}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_{AB}}$$

ist

$$\vec{p}_A = \frac{2\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^N \frac{m_B}{r_{AB}} \vec{v}_{AB} \quad (E2)$$

Dieser kanonische Impuls ist gleich der negativen Summe der kanonischen Impulse aller übrigen Teilchen des Kosmos:

$$\vec{p}_A = - \sum_{B \neq A}^N \vec{p}_B \quad (E3)$$

Für die zeitliche Änderung des Impulses

(E2), d.h. für $\frac{d}{dt} \sum_{B \neq A}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_{AB}} = \dot{\vec{p}}_A$, folgt:

$$\dot{\vec{p}}_A = \frac{2\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^N \frac{m_B}{r_{AB}} \left(\dot{\vec{v}}_{AB} - \frac{v_{AB}}{r_{AB}} \vec{v}_{AB}\right) \quad (E4)$$

Das ergibt die Euler-Lagrange-Gleichungen:

$$\vec{F}_A - \dot{\vec{p}}_A = 0 \quad (E5)$$

der Trägheitsfreien Mechanik.

2.3.3 Kinetischer Impuls und effektive träge Masse

Eine Zerlegung von (E2) in die Absolutgeschwindigkeiten ergibt:

$$\vec{p}_A = \frac{2\beta f}{c^2} m_A \left(\sum_{B \neq A}^N \frac{m_B}{r_{AB}} \vec{v}_A - \sum_{B \neq A}^N \frac{m_B}{r_{AB}} \vec{v}_B \right) \quad (E6)$$

Computersimulation galaktischer Rotationskurven in verschiedenen Gravitationstheorien

Klaus Retzlaff

woraus der kinetische Teilchenimpuls:

$$m_A^* \vec{v}_A = \left(\frac{2\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^N \frac{m_B}{r_{AB}} \right) \vec{v}_A \quad (E7)$$

abgelesen werden kann. Die effektive träge Masse des Teilchens A ist damit vollständig durch die Gravitation der übrigen Massen des Kosmos induziert:

$$m_A^* = \frac{2\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^N \frac{m_B}{r_{AB}}$$

bzw.

$$m_A^* = m_A \frac{2\beta}{c^2} \sum_{B \neq A}^N \phi_{AB} = m_A \frac{2\beta}{c^2} \phi_A \quad (E8)$$

mit dem Gravitationspotential am Ort A. Weil die träge Masse allein durch das Gravitationspotential ϕ_A der übrigen kosmischen Massen bestimmt wird, ist die träge Masse entgegen allen Befürchtungen bezüglich des Machschen Prinzips exakt isotrop²¹. Wenn auch nur die kleinste

²¹ Das ist ein gravierender Unterschied zur Allgemeinen Relativitätstheorie: In nichtinertialen Bezugssystemen, d. h. in allen sich nicht frei im Gravitationsfeld bewegenden Laboratorien, bewirkt nach der allgemeinen Relativitätstheorie eine Anisotropie der räumlichen Komponenten T^k_i des Energie-Impuls-Spannungs-Tensors eine Anisotropie der Metrik des dreidimensionalen Raumes; die dreidimensionale Metrik ist dann nicht konform euklidisch. Als Folge hiervon wird in diesen nichtinertialen Bezugssystemen die effektive träge Masse ein Tensor $\propto g_{ik}$. Dreierimpuls und Dreiergeschwindigkeit sind nicht mehr parallel (FOKKER 1917, 1965). Ein auf der Erde ruhendes Laboratorium stellt in bezug auf das Gravitationsfeld der Erde ein derartiges nichtinertiales Bezugssystem dar. Der Tensor T^k_i besitzt für die Erde einen anisotropen Anteil, der ein Ergebnis der Rotationsbewegung der Erde ist. Dieser anisotrope Teil des Materietensors erzeugt gemäß den Einsteinschen Gleichungen eine Anisotropie-Korrektur $-\gamma_{ik}$ zur dreidimensionalen Metrik, die angenähert durch

$$\gamma_{ik} = -\frac{4fM}{3c^2 R} \tilde{V}_i \tilde{V}_k$$

(M = Erdmasse, R = Erdradius) gegeben ist. Hierbei ist \tilde{V}_i die Rotationsgeschwindigkeit der Erde am

Klaus Retzlaff, Cochstedt, 01/2013

Abweichung von der Isotropie der Trägheit experimentell festgestellt würde, dann wäre die Trägheitsfreie Mechanik beruhend auf dem Riemannschen Potential als widerlegt anzusehen^{22,23}.

Äquator. Aus der Anisotropie der Metrik folgt eine Anisotropie der trägen Massen m , die dazu führt, dass die Masse bei einer Bewegung längs eines Breitenkreises um den Betrag

$$\Delta m = \frac{4fM}{3c^4 R} \tilde{V}^2 m \approx 2 \cdot 10^{-21} m$$

größer ist als bei einer Bewegung in Nord-Süd-Richtung. Dementsprechend ist das Trägheitsmoment eines rotierenden Systems deformiert, soweit Treder lt. [29].

²² Die Isotropie der Trägheit ist bisher mit extremster Genauigkeit bestätigt. So gaben Brown et al. 2010 eine Grenze von $10^{-32} GeV$ für

Protonen und $10^{-33} GeV$ für Neutronen an [26].

Für Elektronen fanden Heckel et al. (2008) eine

Grenze von $10^{-31} GeV$ [27]. Vergleicht man diese Werte mit dem Ergebnis von Treder lt. [29], so sieht man die Diskrepanz:

$$\text{Brown 2010 für Protonen: } \frac{\Delta m}{m} \leq 1.066 \cdot 10^{-32}$$

$$\text{Brown 2010 für Neutronen: } \frac{\Delta m}{m} \leq 1.064 \cdot 10^{-33}$$

$$\text{Heckel 2008 für Elektronen: } \frac{\Delta m}{m} \leq 1.957 \cdot 10^{-28}$$

Damit sind die experimentellen Schranken für eine mögliche Anisotropie der Trägheit um 7 bis 12 (!) Größenordnungen kleiner, als eine aus der Allgemeinen Relativitätstheorie folgenden Anisotropie.

²³ Es sei auf einen sehr fundierten und gut lesbaren Artikel („Das Problem der Trägheit“) von Domenico Giulini aus dem Jahre 2001 verwiesen [28]. Es handelt sich um eine physikgeschichtliche Darstellung der Problematik. Sie ist für das Verständnis sehr gut. Auffällig ist, dass sie 2001(!) immer noch auf dem Stand Ende der 60er Jahre verweilt, wo dem Machschen Prinzip eine Anisotropie der Trägheit zugeschlagen wird. Nach meiner Auffassung hat diese Unkenntnis (sie ist in der Fachwelt allgemein zu beobachten) ihre Ursache in der politischen Teilung der Welt bis 1990. Treder, der Autor der Trägheitsfreien Mechanik, war auch nach der Wende bekennender Kommunist und sogar Gründungsmitglied der SED (Sozialistische Einheitspartei Deutschlands, DDR). Das von ihm geleitete Einsteinlaboratorium ist

Computersimulation galaktischer Rotationskurven in verschiedenen Gravitationstheorien

Klaus Retzlaff

2.3.4. Die Massebegriffe in Newtons Gravitationstheorie und die Äquivalenzprinzipien in der ART und der Trägheitsfreien Mechanik

In der Newtonschen Mechanik und Gravitationstheorie tritt *die Masse* eines Teilchens in 3 unterschiedlichen Bedeutungen auf: Einmal als der Widerstand, den ein Körper gegen die Änderung seines Bewegungszustandes leistet, d.h. als *träge Masse* m^* , dann in der Eigenschaft eines Teilchens, auf ein Gravitationsfeld zu reagieren, d.h. als *passive Schwere Masse* \tilde{m} und schließlich als *aktive schwere Masse* m . Als träge Masse erscheint sie im 2. Axiom:

$$\vec{F} = m^* \cdot \ddot{\vec{r}} \quad (\text{F1})$$

Als passive schwere Masse erscheint sie im Ausdruck für die Gravitationskraft:

$$\vec{F}_{\text{Gravitation}} = \tilde{m} \cdot \vec{G} \quad (\text{F2})$$

und als aktive schwere Masse bestimmt sie die Feldstärke, d.h. die Stärke des Gravitationsfeldes gemäß Newtons Gravitationsgesetz:

$$\vec{G} = f \frac{m}{r^3} \vec{r} \quad (\text{F3})$$

Obwohl die Massen m^* , \tilde{m} und m begrifflich verschieden sind, weil sie ganz unterschiedliche Bedeutungen in der Theorie haben, sind sie doch in der Newtonschen Physik quantitativ gleich:

$$m^* = \tilde{m} = m \quad (\text{F4})$$

Diese Gleichheit der ganz unterschiedlich definierten Massen wird als das starke Äquivalenzprinzip bezeichnet. Für die Gültigkeit des starken Äquivalenzprinzips ist $f = \text{const.}$ wichtig.

Im Unterschied zum starken Äquivalenzprinzip verlangt das schwache Äquivalenzprinzip nur:

$$m^* = \tilde{m} \quad (\text{F5})$$

Über Newton hinausgehende Gravitationstheorien führen diese bei Newton in gewisser Weise zufällige Gleichheit auf ein gemeinsames Wesen zurück oder sie Modifizieren die Gesetzmäßigkeiten der Gravitation durch eine Verletzung von Äquivalenzprinzipien. Wie schon in der Einleitung dargelegt, wird in der Allgemeinen Relativitätstheorie der Begriff der passiven schweren Masse auf den Begriff der Trägheit dadurch zurück geführt, dass der absolute euklidische dreidimensionale Raum Newtons mit seiner absoluten Zeit durch ein vierdimensionales gekrümmtes Raumzeitkontinuum ersetzt wird. In dieser Weise, dass die passive schwere Masse nichts anderes als träge Masse ist, wird das schwache Äquivalentprinzip in der Allgemeinen Relativitätstheorie automatisch erfüllt. Diese Erfüllung des schwachen Äquivalenzprinzips findet ihren mathematischen Ausdruck in der Bewegungsgleichung (D3). Das starke Äquivalenzprinzip wird durch Einsteins so genannte minimale Kopplung zwischen Gravitation und Materie erfasst und bedeutet, dass bis auf Grenzbedingungen und Anfangsbedingungen die Metrik gemäß der Einsteinschen Feldgleichungen:

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik} = \frac{8\pi f}{c^4} T_{ik} \quad (\text{F6})$$

durch die Materie bestimmt wird.

Zur Diskussion der Äquivalenzprinzipien in der Trägheitsfreien Mechanik ist es sinnvoll, zunächst die jeweiligen Lagrange-Funktionen für ein Teilchen A in einem Gravitationsfeld, welches von einem Teilchen B erzeugt wird, zu vergleichen. In der Newtonschen Physik ist das:

$$L_{\text{Newton}} = \frac{1}{2} m_A^* \dot{\vec{r}}_A^2 + \frac{1}{2} m_B^* \dot{\vec{r}}_B^2 + \tilde{m}_A \frac{f m_B}{|\vec{r}_A - \vec{r}_B|} + \tilde{m}_B \frac{f m_A}{|\vec{r}_A - \vec{r}_B|} \quad (\text{F7})$$

jedoch in der Folge der Wiedervereinigung der beiden deutschen Staaten abgewickelt worden. Für das Physikalische ist die politische Position des Autors der Trägheitsfreien Mechanik ohne Belang.
Klaus Retzlaff, Cochstedt, 01/2013

Computersimulation galaktischer Rotationskurven in verschiedenen Gravitationstheorien

Klaus Retzlaff

Es ist hier zu sehen, dass in dieser Lagrange-Funktion alle Massearten vertreten sind. Betrachtet man nun die Lagrange-Funktion für einen Kosmos aus 2 Teilchen in der Trägheitsfreien Mechanik, so vereinfacht sich (D11) zu:

$$L_{\text{trägheitsfrei}} = \frac{f m_A m_B}{|\vec{r}_A - \vec{r}_B|} \left(1 + \beta \frac{v_{AB}^2}{c^2}\right) \quad (\text{F8})$$

Eine träge Masse tritt, dem Namen der Theorie gerecht werdend, hier als Fundamentale Größe, d.h. als eine Teilcheneigenschaft, nicht explizit auf. Die Dynamik ist in diesem Sinne alleine durch die aktiven schweren Massen bestimmt. In diesem Sinne ist eine Unterteilung der Äquivalenzprinzipien in schwaches und starkes Äquivalenzprinzip in der Trägheitsfreien Mechanik nicht gegeben, es sei denn, man interpretiert in (E8) die Masse m_A als die passive schwere Masse gegenüber der aktiven schweren Masse m_B . Diese Interpretation ist auf Grund von (E8) möglich, wobei dann die passive schwere Masse die Trägheit an die Gravitation koppelt – wenn man so reden möchte. Aber es ist besser zu sagen, dass die Trägheit in der Trägheitsfreien Mechanik eine abgeleitete Größe ist.

Um die Äquivalenz von Trägheit und Schwere zu sichern, muss aber auf Grund der Beziehung (E8) die Bedingung:

$$1 = \frac{2\beta f}{c^2} \sum_{B \neq A}^N \frac{m_B}{r_{AB}} \quad (\text{F9})$$

erfüllt werden. Diese Bedingung stellt sicher, dass bis auf lokale Effekte die träge Masse m_A^* und die schwere Masse m_A numerisch gleich sind. (F9) setzt einen geschlossenen Mach-Einstein-Kosmos voraus. Lokale Effekte der Trägheitsinduktion führen dann mit (E8) und der Zerlegung $N = N_{\text{lokal}} + N_{\text{Kosmos}}$ auf:

$$m_A^* = \frac{2\beta f}{c^2} \left(\sum_{B \neq A}^{N_{\text{lokal}}} \frac{m_B}{r_{AB}} + \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_{AB}} \right) m_A \quad (\text{F10})$$

und wegen $N_{\text{lokal}} \ll N_{\text{Kosmos}} \approx N$ mit (F9) schließlich auf:

$$m_A^* = m_A^*(r_{AB}^{\text{lokal}}) = m_A \left(1 + \frac{2\beta f}{c^2} \sum_{B \neq A}^{N_{\text{lokal}}} \frac{m_B}{r_{AB}}\right) \quad (\text{F11})$$

Die Beziehung (F11) beschreibt den lokalen Einfluss der Gravitation auf die Trägheit des Partikels A, vergleiche [6].

Es ist sofort zu sehen, dass mit $\beta = \frac{3}{2}$ im

2. Term der Ausdruck (F11) exakt mit dem Einsteinschen Ausdruck für die Trägheitsinduktion aus der Allgemeinen Relativitätstheorie zusammenfällt, wie er in der 1. Post-Newtonschen-Näherung entsteht und woraus bekanntlich der Wert für die Periheldrehung des Planeten Merkur abgeleitet wird.

2.3.5 Bewegungsgleichung für ein Teilchen in der Galaxis

Ausführlich geschrieben haben die Euler-Lagrange-Gleichungen (E5) in der Trägheitsfreien Mechanik die allgemeine Form:

$$\sum_{B \neq A}^N \frac{2\beta f}{c^2} \frac{m_A m_B}{r_{AB}} (\vec{v}_{AB} - \frac{v_{AB}}{r_{AB}} \vec{v}_{AB}) + \sum_{B \neq A}^N f \frac{m_A m_B}{r_{AB}^3} \vec{r}_{AB} \left(1 + \beta \frac{v_{AB}^2}{c^2}\right) = 0 \quad (\text{G1})$$

mit $r_{AB} = |\vec{r}_A - \vec{r}_B|$ und $v_{AB} = |\vec{v}_A - \vec{v}_B|$. Diese Bewegungsgleichungen erfassen die Teilchen des gesamten Kosmos. Zur Beschreibung der galaktischen Verhältnisse werden diese Gleichungen in einen kosmischen und einen lokalen Anteil, den galaktische Anteil, zerlegt: $N = N_{\text{Kosmos}} + N_{\text{Galaxis}}$ und soweit möglich in die Absolutgrößen zerlegt. Auf diese Weise erhält man insgesamt 12 Terme \vec{T}_k , mit $k = 1 \dots 12$, so dass die Euler-Lagrange-Gleichungen die Form:

$$\sum_{k=1}^{12} \vec{T}_k = 0 \quad (\text{G2})$$

Computersimulation galaktischer Rotationskurven in verschiedenen Gravitationstheorien

Klaus Retzlaff

erhalten²⁴. Diese Terme werden später in einem gesonderten Kapitel und nach Einführung der Koordinaten gemäß (A1), (A3) und (A4) diskutiert.

2.3.5 Einführung der galaktischen Koordinaten und Projektionsvektoren

Unter Verwendung der galaktischen Koordinaten gemäß (A1) und den Zeitableitungen erhalten die 12 Terme \vec{T}_k

²⁴ Diese Terme sind im Einzelnen:

$$\begin{aligned}\vec{T}_1 &= +\frac{2\beta f}{c^2} m_A \dot{\vec{v}}_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_{AB}} \\ \vec{T}_2 &= -\frac{2\beta f}{c^2} m_A \vec{v}_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_{AB}} \frac{v_{AB}}{r_{AB}} \\ \vec{T}_3 &= +f m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} \vec{r}_{AB} \quad (\text{Newton-Term}) \\ \vec{T}_4 &= +\frac{2\beta f}{c^2} m_A \dot{\vec{v}}_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Galaxis}}} \frac{m_B}{r_{AB}} \\ \vec{T}_5 &= -\frac{2\beta f}{c^2} m_A \vec{v}_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Galaxis}}} \frac{m_B}{r_{AB}} \frac{v_{AB}}{r_{AB}} \\ \vec{T}_6 &= +f m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Galaxis}}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} \vec{r}_{AB} \quad (\text{Newton-Term}) \\ \vec{T}_7 &= -\frac{2\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_{AB}} \dot{\vec{v}}_B \\ \vec{T}_8 &= \frac{2\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_{AB}} \frac{v_{AB}}{r_{AB}} \vec{v}_B \\ \vec{T}_9 &= \frac{2\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} \vec{r}_{AB} v_{AB}^2 \\ \vec{T}_{10} &= -\frac{2\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Galaxis}}} \frac{m_B}{r_{AB}} \dot{\vec{v}}_B \\ \vec{T}_{11} &= \frac{2\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Galaxis}}} \frac{m_B}{r_{AB}} \frac{v_{AB}}{r_{AB}} \vec{v}_B \\ \vec{T}_{12} &= \frac{2\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Galaxis}}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} \vec{r}_{AB} v_{AB}^2\end{aligned}$$

in den Euler-Lagrange-Gleichungen eine neue Form (H1)²⁵:

$$\vec{T}_1 = -\frac{2\beta}{c^2} m_A r_A \dot{\phi}_A^2 \left(\begin{array}{c} \cos \varphi_A \\ \sin \varphi_A \end{array} \right) \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} f \frac{m_B}{r_{AB}}$$

mit $r_A = |\vec{r}_A|$ und $r_{AB} = |\vec{r}_A - \vec{r}_B|$. Dieser Term enthält das mittlere kosmische Gravitationspotential:

$$\vec{T}_1 = -\frac{2\beta}{c^2} m_A r_A \dot{\phi}_A^2 \left(\begin{array}{c} \cos \varphi_A \\ \sin \varphi_A \end{array} \right) \left| \phi_{\text{Kosmos}} \right|$$

Entsprechend ergeben sich alle weiteren Terme:

$$\vec{T}_2 = -\frac{2\beta f}{c^2} m_A r_A \dot{\phi}_A \left(\begin{array}{c} -\sin \varphi_A \\ \cos \varphi_A \end{array} \right) \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_{AB}} \frac{v_{AB}}{r_{AB}}$$

mit $v_{AB} = |\vec{v}_A - \vec{v}_B|$,

$$\vec{T}_3 = f m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} \left(r_A \begin{pmatrix} \cos \varphi_A \\ \sin \varphi_A \end{pmatrix} - r_B \begin{pmatrix} \cos \varphi_B \\ \sin \varphi_B \end{pmatrix} \right)$$

$$\vec{T}_4 = -\frac{2\beta}{c^2} m_A r_A \dot{\phi}_A^2 \left(\begin{array}{c} \cos \varphi_A \\ \sin \varphi_A \end{array} \right) \left| \phi_{\text{Galaxis}}(r_A) \right|$$

mit $\phi_{\text{Galaxis}} = -f \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Galaxis}}} \frac{m_B}{r_{AB}}$,

$$\vec{T}_5 = -\frac{2\beta f}{c^2} m_A r_A \dot{\phi}_A \left(\begin{array}{c} -\sin \varphi_A \\ \cos \varphi_A \end{array} \right) \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Galaxis}}} \frac{m_B}{r_{AB}} \frac{v_{AB}}{r_{AB}}$$

$$\vec{T}_6 = f m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Galaxis}}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} \left(r_A \begin{pmatrix} \cos \varphi_A \\ \sin \varphi_A \end{pmatrix} - r_B \begin{pmatrix} \cos \varphi_B \\ \sin \varphi_B \end{pmatrix} \right)$$

$$\vec{T}_7 = \frac{2\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_{AB}} r_B \dot{\phi}_B^2 \left(\begin{array}{c} \cos \varphi_B \\ \sin \varphi_B \end{array} \right)$$

$$\vec{T}_8 = \frac{2\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_{AB}} \frac{v_{AB}}{r_{AB}} r_B \dot{\phi}_B \left(\begin{array}{c} -\sin \varphi_B \\ \cos \varphi_B \end{array} \right).$$

Der Term \vec{T}_9 zerfällt durch die Zerlegung in die Absolutgrößen $\vec{r}_{AB} = \vec{r}_A - \vec{r}_B$ in 2 Terme $\vec{T}_9 = \vec{T}_9^A + \vec{T}_9^B$, vergleiche mit der Fußnote zu (G12). Die Zerlegung beruht darauf, dass \vec{T}_9 den Faktor \vec{r}_{AB} explizit enthält, so folgt:

²⁵ Da die Terme selbst nummeriert sind, werden alle diesbezüglichen Gleichungen unter der Nummer (E1) zusammengefasst.

Computersimulation galaktischer Rotationskurven in verschiedenen Gravitationstheorien

Klaus Retzlaff

$$\vec{T}_9^A = \frac{\beta f}{c^2} m_A r_A \begin{pmatrix} \cos \varphi_A \\ \sin \varphi_A \end{pmatrix} \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} G_{AB}$$

mit

$$G_{AB} = r_A^2 \dot{\varphi}_A^2 + r_B^2 \dot{\varphi}_B^2 - 2 r_A r_B \dot{\varphi}_A \dot{\varphi}_B g_{AB}$$

mit

$$g_{AB} = \sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B \quad \text{und}$$

schließlich:

$$\vec{T}_9^B = -\frac{\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} r_B \begin{pmatrix} \cos \varphi_B \\ \sin \varphi_B \end{pmatrix} G_{AB}.$$

Die beiden Terme \vec{T}_{10} und \vec{T}_{11} sind einfache:

$$\vec{T}_{10} = \frac{2\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Galaxis}}} \frac{m_B}{r_{AB}} r_B \dot{\varphi}_B^2 \begin{pmatrix} \cos \varphi_B \\ \sin \varphi_B \end{pmatrix}$$

$$\vec{T}_{11} = \frac{2\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Galaxis}}} \frac{m_B}{r_{AB}} \frac{v_{AB}}{r_{AB}} r_B \dot{\varphi}_B \begin{pmatrix} -\sin \varphi_B \\ \cos \varphi_B \end{pmatrix}.$$

Der Term \vec{T}_{12} zerfällt analog \vec{T}_9 in 2

Bestandteile $\vec{T}_{12} = \vec{T}_{12}^A + \vec{T}_{12}^B$:

$$\vec{T}_{12}^A = \frac{\beta f}{c^2} m_A r_A \begin{pmatrix} \cos \varphi_A \\ \sin \varphi_A \end{pmatrix} \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Galaxis}}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} G_{AB}$$

$$\vec{T}_{12}^B = -\frac{\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Galaxis}}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} r_B \begin{pmatrix} \cos \varphi_B \\ \sin \varphi_B \end{pmatrix} G_{AB}.$$

Durch die Einführung der galaktischen Koordinaten besteht nun eine einfache Möglichkeit, die Orientierung der Vektoren \vec{T}_k zu beurteilen. Mit Hilfe der Projektionsvektoren:

$$\vec{P}_A^R = \begin{pmatrix} \cos \varphi_A \\ \sin \varphi_A \end{pmatrix} \quad (\text{H2})$$

$$\vec{P}_A^T = \begin{pmatrix} -\sin \varphi_A \\ \cos \varphi_A \end{pmatrix} \quad (\text{H3})$$

können die Vektoren \vec{T}_k hinsichtlich ihrer radialen und tangentialen Komponente untersucht werden, d.h. man findet die jeweils radiale Komponente mit dem Skalarprodukt:

$$\tau_k = \vec{T}_k \cdot \vec{P}_A^R \quad (\text{H4})$$

Und die tangential Komponente ist dann:

$$\gamma_k = \vec{T}_k \cdot \vec{P}_A^T \quad (\text{H5})$$

Diese Projektionen lassen sich entsprechend auf die Euler-Lagrange-Gleichungen anwenden. Das führt auf:

$$\sum_{k=1}^{12} \tau_k = 0 \quad (\text{H6})$$

und

$$\sum_{k=1}^{12} \gamma_k = 0 \quad (\text{H7})$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen (G2) zerfallen damit in Euler-Lagrange-Gleichungen (H6) und (H7) für die jeweiligen Komponenten. Man wird im Folgenden sehen, dass sich auf Grund der Radialsymmetrie und Mittels der Projektion die Euler-Lagrange-Gleichungen wesentlich vereinfachen.

2.3.6 Euler-Lagrange-Gleichungen und kosmologische Prinzipien

Auf Grund des Machschen Prinzips geht der Kosmos in die Euler-Lagrange-Gleichungen der Trägheitsfreien Mechanik ein. Weil des Universums den wesentlichen Teil der Trägheitsinduktion verursacht, ist es erforderlich, Annahmen über dessen Struktur vorzunehmen, d.h. es müssen kosmologische Prinzipien eingeführt werden. Das bedeutet, es sind Annahmen über die Verteilung der kosmischen Materie und über die Bewegung dieser Materie zu treffen.

Entsprechend dem Stand des Wissens um den beobachtbaren Bereich des Universums wird daher eine:

- homogene Materieverteilung
- und eine isotrope Expansion des Universums angenommen
- Der Kosmos ist ein geschlossener Mach-Einstein-Kosmos.

Über ein Hubble-Gesetz²⁶ wird keine Aussage getroffen. Diese Annahmen werden im weiteren Text als das *kosmologische Prinzip* bezeichnet.

²⁶ Damit ist gemeint, dass keine Annahme gemacht wird, ob das Universum linear oder beschleunigt expandiert.

Computersimulation galaktischer Rotationskurven in verschiedenen Gravitationstheorien

Klaus Retzlaff

2.3.7 Diskussion der radialen Euler-Lagrange-Gleichung

Für die Bewegung der Sterne auf Kreisbahnen innerhalb der zweidimensionalen radialsymmetrischen galaktischen Scheibe ist allein die Euler-Lagrange-Gleichung (H6) von Bedeutung, denn sie beschreibt das Gleichgewicht von aus der induzierten Trägheit abgeleiteten Tangentialkräften und der anziehenden Gravitationskraft. Daher beginnt die Analyse mit der Untersuchung der Terme τ_k aus der Gleichung (H6), wobei zuerst die vollständigen Terme angegeben werden. Anschließend werden diese so spezifiziert, dass sich der Teststern an der Winkelposition $\varphi_A = 0$ befindet, so wie es dann bei der Computersimulation der Fall ist.

Tangentiale Terme: Es ist evident, dass es eine Klasse von Termen \vec{T}_k gibt, die vollständig orthogonal auf zum Radiusvektor, bzw. zum Projektionsvektor \vec{P}_A^R stehen. Für radiale Projektionen dieser Vektoren \vec{T}_k gilt automatisch:

$$\tau_2 = \tau_5 = 0 \quad (\text{K1})$$

Es folgt die Untersuchung der übrigen Terme, beginnend mit τ_1 . Die Projektion (H4) liefert sofort:

$$\tau_1 = -\frac{2\beta}{c^2} m_A r_A \dot{\varphi}_A^2 |\phi_{Kosmos}| \quad (\text{K2})$$

Der Term τ_3 ist der Newtonsche Term des Mach-Einstein-Kosmos. Auf Grund des kosmologischen Prinzips, kompensieren sich jedoch alle Kräfte und es gibt keine radiale Komponente, die durch die kosmischen Massen hervorgerufen wird.

$$\begin{aligned} \tau_3 = & f m_A r_A \sum_{B \neq A}^{N_{Kosmos}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} - \\ & - f m_A \sum_{B \neq A}^{N_{Kosmos}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} r_B \cos \varphi_A \cos \varphi_B - \\ & - f m_A \sum_{B \neq A}^{N_{Kosmos}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} r_B \sin \varphi_A \sin \varphi_B \end{aligned} \quad (\text{K3})$$

und es gilt:

$$\tau_3 = 0 \quad (\text{K4})$$

Das galaktische Analogon zu τ_1 ist τ_4 :

$$\tau_4 = -\frac{2\beta}{c^2} m_A r_A \dot{\varphi}_A^2 |\phi_{Galaxis}(r_A)| \quad (\text{K5})$$

Der Term τ_6 repräsentiert die lokale radiale galaktische Newtonsche Gravitationskraft:

$$\begin{aligned} \tau_6 = & f m_A \sum_{B \neq A}^{N_{Galaxis}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} r_A - \\ & - f m_A \sum_{B \neq A}^{N_{Galaxis}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} r_B g_{AB} \end{aligned} \quad (\text{K6})$$

mit $g_{AB} = \sin \varphi_A \sin \varphi_B + \cos \varphi_A \cos \varphi_B$ und (K6) verkürzt sich für die spezielle Position des Testteilchens $\varphi_A = 0$ auf:

$$\tau_6 = f m_A \sum_{B \neq A}^{N_{Galaxis}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} (r_A - r_B \cos \varphi_B) \quad (\text{K7})$$

Der Term τ_7 ergibt sich zu:

$$\tau_7 = \frac{2\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{Kosmos}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} r_B \dot{\varphi}_B^2 g_{AB} \quad (\text{K8})$$

und verkürzt:

$$\tau_7 = \frac{2\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{Kosmos}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} r_B \dot{\varphi}_B^2 \cos \varphi_B \quad (\text{K9})$$

Dieser Term muss genauer untersucht werden. Für die Teilchen des fernen Kosmos gilt $R_{Galaxis} \ll r_{AB} \approx r_B$. Damit wird die Beziehung (K9) zu:

$$\tau_7 = \frac{2\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{Kosmos}} m_B \dot{\varphi}_B^2 \cos \varphi_B \quad (\text{K10})$$

Da sich die kosmischen Teilchen nur radial bewegen sollen, d.h., dass der Kosmos gegenüber der Galaxis nicht rotiert

Computersimulation galaktischer Rotationskurven in verschiedenen Gravitationstheorien

Klaus Retzlaff

($\dot{\varphi}_B = 0$), verschwindet dieser interessante Term:

$$\tau_7 = 0 \quad (\text{K11})$$

Allerdings würde dieser Term auch auf Grund der Homogenität der kosmischen Massenverteilung verschwinden.

Für den Term τ_8 findet man:

$$\tau_8 = \frac{2\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_{AB}} \frac{v_{AB}}{r_{AB}} r_B \dot{\varphi}_B \tilde{g}_{AB} \quad (\text{K12})$$

mit $\tilde{g}_{AB} = \sin \varphi_A \cos \varphi_B - \cos \varphi_A \sin \varphi_B$. Die Verkürzte Form ist:

$$\tau_8 = -\frac{2\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_{AB}} \frac{v_{AB}}{r_{AB}} r_B \dot{\varphi}_B \sin \varphi_B \quad (\text{K13})$$

Auch (K12), bzw. (K13) enthalten eine kosmische Rotation und zugleich führt wiederum die Homogenität der Massenverteilung zum Verschwinden des Terms:

$$\tau_8 = 0 \quad (\text{K14})$$

Der unhandliche Term τ_9 spaltet sich auf in:

$$\tau_9^A = \frac{\beta f}{c^2} m_A r_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} v_{AB}^2 \quad (\text{K15})$$

und

$$\tau_9^B = -\frac{\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} r_B v_{AB}^2 \quad (\text{K16})$$

mit $v_{AB}^2 = v_A^2 - 2v_A v_B \mathcal{G}_{AB} + v_B^2$. Das ist verkürzt $v_{AB}^2 = v_A^2 - 2v_A v_B \cos \varphi_B + v_B^2$ und führt auf:

$$\begin{aligned} \tau_9^A &= \frac{\beta f}{c^2} m_A r_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} v_A^2 + \\ &+ \frac{\beta f}{c^2} m_A r_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} v_B^2 - \\ &- \frac{2\beta f}{c^2} m_A r_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} v_A v_B \cos \varphi_B \end{aligned} \quad (\text{K17})$$

und

$$\begin{aligned} \tau_9^B &= -\frac{\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} r_B v_A^2 - \\ &- \frac{\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} r_B v_B^2 + \\ &+ \frac{2\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} r_B v_A v_B \cos \varphi_B \end{aligned} \quad (\text{K18})$$

Mit $r_A \leq R_{\text{Galaxis}} \ll r_{AB} \approx r_B$ sowie der Limitierung gemäß (K10) folgt für die Terme in (K17):

$$\begin{aligned} \frac{\beta f}{c^2} m_A r_A v_A^2 \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_B^3} &\approx 0 \\ \frac{\beta f}{c^2} m_A r_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_B^3} v_B^2 &\approx 0 \end{aligned} \quad (\text{K19})$$

$$\frac{2\beta f}{c^2} m_A r_A v_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_B^3} v_B \cos \varphi_B = 0$$

Der 3. Term ist auf Grund des kosmologischen Prinzips, exakt Null. Entsprechendes ergibt sich für (K18):

$$\begin{aligned} \frac{\beta f}{c^2} m_A v_A^2 \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_B^2} &\approx 0 \\ \frac{\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_B^2} v_B^2 &\approx 0 \end{aligned} \quad (\text{K20})$$

$$\frac{2\beta f}{c^2} m_A v_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Kosmos}}} \frac{m_B}{r_B^2} v_B \cos \varphi_B = 0$$

Der galaktische Term τ_{10} ist:

$$\tau_{10} = \frac{2\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Galaxis}}} \frac{m_B}{r_{AB}} r_B \dot{\varphi}_B \mathcal{G}_{AB} \quad (\text{K21})$$

und verkürzt:

$$\tau_{10} = \frac{2\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Galaxis}}} \frac{m_B}{r_{AB}} r_B \dot{\varphi}_B \cos \varphi_B \quad (\text{K22})$$

Auch τ_{11} ist ein galaktischer Term:

$$\tau_{11} = \frac{2\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Galaxis}}} \frac{m_B}{r_{AB}} \frac{v_{AB}}{r_{AB}} r_B \dot{\varphi}_B \tilde{g}_{AB} \quad (\text{K23})$$

und verkürzt:

$$\tau_{11} = -\frac{2\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{\text{Galaxis}}} \frac{m_B}{r_{AB}} \frac{v_{AB}}{r_{AB}} r_B \dot{\varphi}_B \sin \varphi_B \quad (\text{K24})$$

und schließlich:

$$\tau_{11} = 0 \quad (\text{K25})$$

Computersimulation galaktischer Rotationskurven in verschiedenen Gravitationstheorien

Klaus Retzlaff

Der Term τ_{12} ist das galaktische Gegenstück zu τ_9 .

$$\tau_{12}^A = \frac{\beta f}{c^2} m_A r_A \sum_{B \neq A}^{N_{Galaxis}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} v_{AB}^2 \quad (K26)$$

und

$$\tau_{12}^B = -\frac{\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq B}^{N_{Galaxis}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} r_B v_{AB}^2 g_{AB} \quad (K27)$$

mit $v_{AB}^2 = v_A^2 - 2v_A v_B g_{AB} + v_B^2$. Für die verkürzte Form ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} \tau_{12}^A &= \frac{\beta f}{c^2} m_A r_A \sum_{B \neq A}^{N_{Galaxis}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} v_A^2 + \\ &+ \frac{\beta f}{c^2} m_A r_A \sum_{B \neq A}^{N_{Galaxis}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} v_B^2 - \\ &- \frac{2\beta f}{c^2} m_A r_A \sum_{B \neq A}^{N_{Galaxis}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} v_A v_B \cos \varphi_B \end{aligned} \quad (K28)$$

und

$$\begin{aligned} \tau_{12}^B &= -\frac{\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{Galaxis}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} r_B v_A^2 - \\ &- \frac{\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{Galaxis}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} r_B v_B^2 + \\ &+ \frac{2\beta f}{c^2} m_A \sum_{B \neq A}^{N_{Galaxis}} \frac{m_B}{r_{AB}^3} r_B v_A v_B \cos \varphi_B \end{aligned} \quad (K29)$$

Die Absolutgeschwindigkeiten können auf Grund der Kreisbahnbewegung nach Bedarf auch $v_A = r_A \dot{\varphi}_A$ und $v_B = r_B \dot{\varphi}_B$ geschrieben werden, was teilweise für die Interpretation nützlich ist.

Es ist nicht möglich, die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\tau_1 + \tau_4 + \tau_6 + \tau_{10} + \tau_{12} = 0 \quad (K30)$$

auf eine explizite Form zu bringen und einfach zu integrieren. Aus diesem Grunde wir im folgenden Kapitel ein Rekursionsalgorithmus konstruiert.

2.3.8 Rekursionsalgorithmus für die Lösung der Euler-Lagrange-Gleichungen

3. Ergebnisse der Computersimulation

4. Diskussion

5. Zusammenfassung

Quellen

- [1] M. Milgrom, *Astrophys. J.* 270, 365 (1983).
- [2] H.-H. v. Borzeszkowski and H.-J. Treder, *Foundation of Physics*, Vol. 28, No. 2, 1998
- [3] E. Mach, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*. (9.Auflage), Leipzig 1933
- [4] A. Einstein, *Grundzüge der Relativitätstheorie*, Akademie-Verlag Berlin 1979
- [5] H.-J. Treder, *Die Relativität der Trägheit*, Akademie-Verlag Berlin 1972
- [6] H.-J. Treder, *Über die Prinzipien der Dynamik von Einstein, Hertz, Mach und Poincaré*, Akademie-Verlag Berlin 1974
- [7] H. Hönl, H. Dehnen, *Zeitschrift für Physik* 191, 313-328 (1966)
- [8] A. Friedmann, *Über die Krümmung des Raumes*, *Z. Physik* 10, 377, 1922
- [9] H.-J. Treder, persönliche Mitteilung, 1987
- [10] H.-J. Treder, *Zur kosmologischen Testung des Machschen Prinzips*, *Astron. Nachrichten*, 303 (1982) 6, 317-319
- [11] D.-E. Liebscher, *Kosmologie*, Barth Verlagsgesellschaft mbH Leipzig 1994
- [12] V. Hughes, *Mach's principle and experiments on mass anisotropy*, New York 1964
- [13] D. Bohm, *Quantum Theorie*, Prentice-Hall, New York 1951
- [14] D. Bohm, *A suggested interpretation of the quantum theory in terms of "hidden" variables*, *Phys. Rev.* 85, 166-193, 1952
- [15] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen: *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, *Phys. Rev.* 47 (1935), S. 777 - 780
- [16] H.-H. v. Borzeszkowski and H.-J. Treder, *Found. Phys.* 27, 661 (1997)
- [17] R. Weitzenboeck, *Differentialinvarianten in der Einsteinschen Theorie des Fernparallelismus*, *Berliner Ber.* 1928, p. 466
- [18] A. Einstein, *Riemann-Geometrie und Aufrechterhaltung des Begriffs des Fernparallelismus*, *Berliner Ber.* 1928, p. 219
- [19] A. Einstein, *Einheitliche Feldtheorie und Hamiltonsches Prinzip*, *Berliner Ber.* 1929, p. 124
- [20] A. Einstein and Mayer, *Systematische Untersuchungen über kompatible Feldgleichungen, welche von einem Riemannschen Raum mit Fernparallelismus gesetzt werden können*, *Berliner Ber.* 1931, p. 3
- [21] M. Honma, Y. Sofue, *Rotations Curve of Galaxy*, 1997, *PASJ*, 49,453

Computersimulation galaktischer Rotationskurven in verschiedenen Gravitationstheorien

Klaus Retzlaff

- [22] H.-J. Treder, J.-P. Mückel, Große kosmische System, Akademie-Verlag Berlin, 1981
- [23] V. A. Fock, Die Grundprinzipien der Einsteinschen Gravitationstheorie, Einstein-Symposium 1965, Akademie-Verlag Berlin 1966
- [24] H. Weyl, Raum-Zeit-Materie, Springer Verlag Berlin 1921
- [25] H. Poincaré, Wissenschaft und Hypothese, Leipzig 1910
- [26] Brown, J. M.; Smullin, S. J.; Kornack, T. W.; Romalis, M. V.: New Limit on Lorentz- and CPT-Violating Neutron Spin Interactions. In: Physical Review Letters. 105, Nr. 15, 2010, S. 151604.
- [27] Heckel, B. R.; Adelberger, E. G.; Cramer, C. E.; Cook, T. S.; Schlamminger, S.; Schmidt, U.: Preferred-frame and CP-violation tests with polarized electrons. In: Physical Review D. 78, Nr. 9, 2008, S. 092006.
- [28] D. Giulini, Das Problem der Trägheit, Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte, Preprint 190, Freiburg i. Br. (2001)
- [29] H.-J. Treder, Zur Anisotropie träger Massen in tensoriellen Gravitationstheorien, Annalen der Physik, 29: pages 233–250, 1973 (Article first published online: 13 OCT 2008)