

Rotationskurve der Milchstraßengalaxie auf Basis der Modifizierten Newtonschen Dynamik (MOND)

Klaus Retzlaff

Zusammenfassung: Die **MO**difizierte **Newton**sche **D**ynamik (**MOND**) wurde 1983 von Mordehai Milgrom als Alternative zum Postulat der Dunklen Materie vorgeschlagen [2]. Diese hypothetische Theorie sollte die Eigenart der beobachteten galaktischen Rotationskurven aus einer Modifikation der Newtonschen Dynamik erklären. Wie Simulationen des Autors auf Basis der Newtonschen Theorie belegen, ist aber die Annahme Dunkler Materie in der Milchstraßengalaxie nicht erforderlich, um das Rotationsverhalten zu erklären. Es ist daher anzunehmen, dass die Modifizierte Newtonschen Dynamik bei Anwendung auf die Milchstraßengalaxie in Konflikt zu den Beobachtungen gerät. Dieser Frage wird hier nachgegangen.



Das Modell der Milchstraße

Für die Milchstraße werden die folgenden geometrischen Daten zugrunde gelegt:

Milchstraßengalaxie

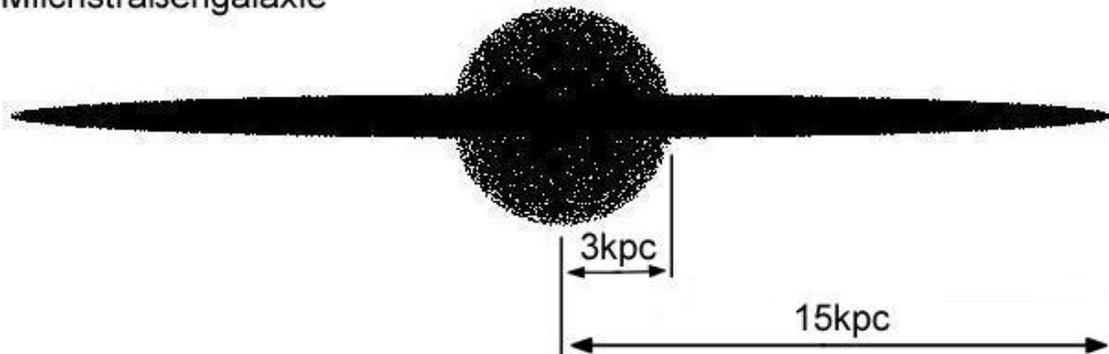


Abbildung 1: Geometrische Form der Modell-Galaxie: Bulge-Durchmesser = 6 kpc
Scheibendurchmesser = 30 kpc, maximale Dicke der Scheibe = 1,2 kpc. Der Buge in der Simulation scheint übertrieben, aber der größte Anteil der Masse befindet sich in der Simulation im Zentrum [1].

Der Querschnitt der Scheibe wird durch eine Ellipse beschrieben. Es wird weiter eine radialsymmetrische Dichteverteilung angenommen, welche Ergebnis der Computersimulation auf Basis der nicht modifizierten Newtonschen Gravitationstheorie ist. Eine Komponente der Galaxie ist ein zentrales „Schwarzes Loch“ mit einer Masse von $m_{\text{Black-Hole}} = 4,31 \cdot 10^6$ Sonnenmassen[3]. Doch diese Masse reicht nicht aus, um die richtige

Rotationskurve der Milchstraßengalaxie auf Basis der Modifizierten Newtonschen Dynamik (MOND)

Klaus Retzlaff

Rotationskurve im Bereich bis 4kpc zu reproduzieren, denn in der Zentrumsumgebung liegt eine weit höhere Massenkonzentration vor und das in der Simulation verwendete Raster aus Stützpunkten für die Massenverteilungsfunktion ist in diesem Bereich zu grob, die Verteilung ausreichend anzunähern¹. In der Simulation ist nur ein Raster mit Stützpunkten für die Dichte im Abstand von 1kpc verwendet worden. Darum wird im Modell die Zentralmasse höher gewählt, nämlich zu $m_{Zentralmasse} = 10^9$ Sonnenmassen. Der Abstand der Sonne ist $R_{Sonne} = 7,94$ kpc vom Zentrum entfernt. Die gemessene Geschwindigkeit, mit der sie die Galaxie umkreist, ist $R_{Sonne} = 222$ km/s [4].

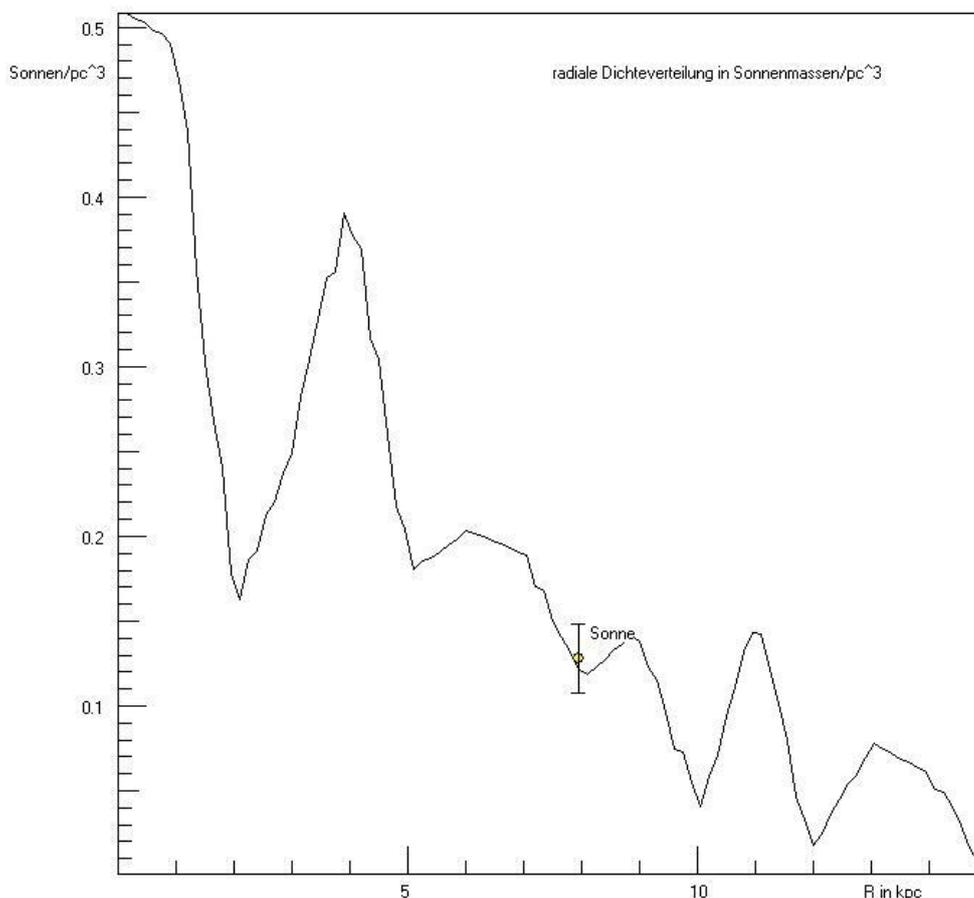


Abbildung 2: Dichteverteilung der Simulation auf Basis der Newtonschen Gravitationstheorie. Die beobachtet Massendichte stimmt mit den Simulationsergebnissen sehr gut überein und die Sonne hat die richtige Umlaufgeschwindigkeit. Der Fehlerbalken bezieht sich auf die Messwerte der Massendichte in Sonnenumgebung.

¹ Computersimulationen müssen häufig einen Kompromiss zwischen Genauigkeit und Rechenzeit, bzw. Speicherbedarf darstellen. Da es hier nicht um die Feinstruktur des Zentralgebietes geht, ist die zugrunde gelegte Näherung gerechtfertigt.

Rotationskurve der Milchstraßengalaxie auf Basis der Modifizierten Newtonschen Dynamik (MOND)

Klaus Retzlaff

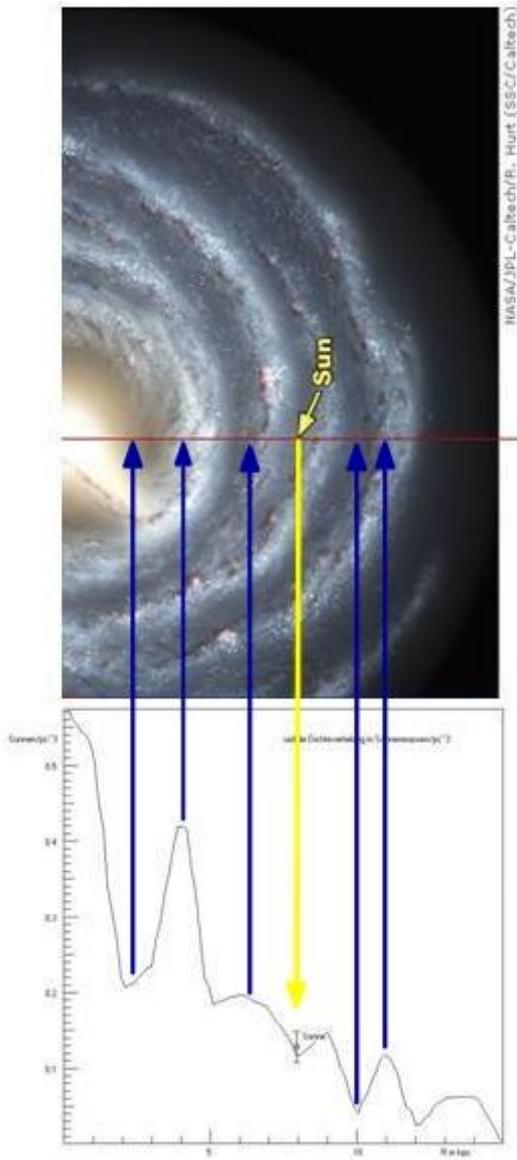


Abbildung 3: Die künstliche Zeichnung, wie sie von der Nasa veröffentlicht wurde, zeigt eine erstaunliche Übereinstimmung mit der auf Basis der Simulation berechneten Dichteverteilung. Die Maxima in der simulierten Dichte fallen mit den Orten der Spiralarme zusammen.

Wahrscheinlichkeit nicht davon auszugehen, in diesem Bereich einen irgendwie relevanten Anteil Dunklere Materie zu finden. Damit entfällt in diesem Bereich die Notwendigkeit alternativ zur Dunklen Materie über

Die Dichteverteilung steht in Übereinstimmung mit der Beobachtung baryonischer Materie [5]. Auf Basis dieser Werte ergibt sich die Dichteverteilung, wie sie in der Abbildung 2 zu sehen ist. Diese Dichteverteilung bedeutet eine Masse von 73.19% der galaktischen Gesamtmasse innerhalb der Sonnenbahn. Die Gesamtmasse der Galaxie, die sich auf einen Radius von 15kpc bezieht, beträgt dabei 108,5 Milliarden Sonnenmassen. Das ist eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit den Beobachtungsdaten, allerdings ist in Rechnung zu stellen, dass die Beobachtungsdaten für die Massendichte einen erheblichen Fehler von rund 25% aufweisen. Bemerkenswert ist ein Vergleich der Dichteverteilung mit einer künstlerischen Zeichnung unserer Milchstraße, welches von der Nasa veröffentlicht wurde. Sowohl die Spiralarme als auch die sternearmen Bereiche stimmen mit der berechneten Dichtekurve überein. Es ist zu vermuten, dass dem Künstler Messdaten zur Verfügung gestanden haben, siehe Abbildung 3.

Newtonsche Rotation

Die Rotationskurve unserer Milchstraße wird bis 15kpc offensichtlich mit der Dichteverteilung sehr gut reproduziert. Aus diesem Grunde ist mit hoher anzunehmender

Rotationskurve der Milchstraßengalaxie auf Basis der Modifizierten Newtonschen Dynamik (MOND)

Klaus Retzlaff

andere Gravitationstheorien nachzudenken.

Die Rotationskurve, welche sich bei der betrachteten Dichteverteilung und Geometrie der Galaxie ergibt, ist in der folgenden Abbildung 4 zu finden. Diese Abbildung zeigt aber auch eine Rotationskurve, wie sie sich bei derselben Dichteverteilung bei einer kugelsymmetrischen approximativen Berechnung² ergeben würde.

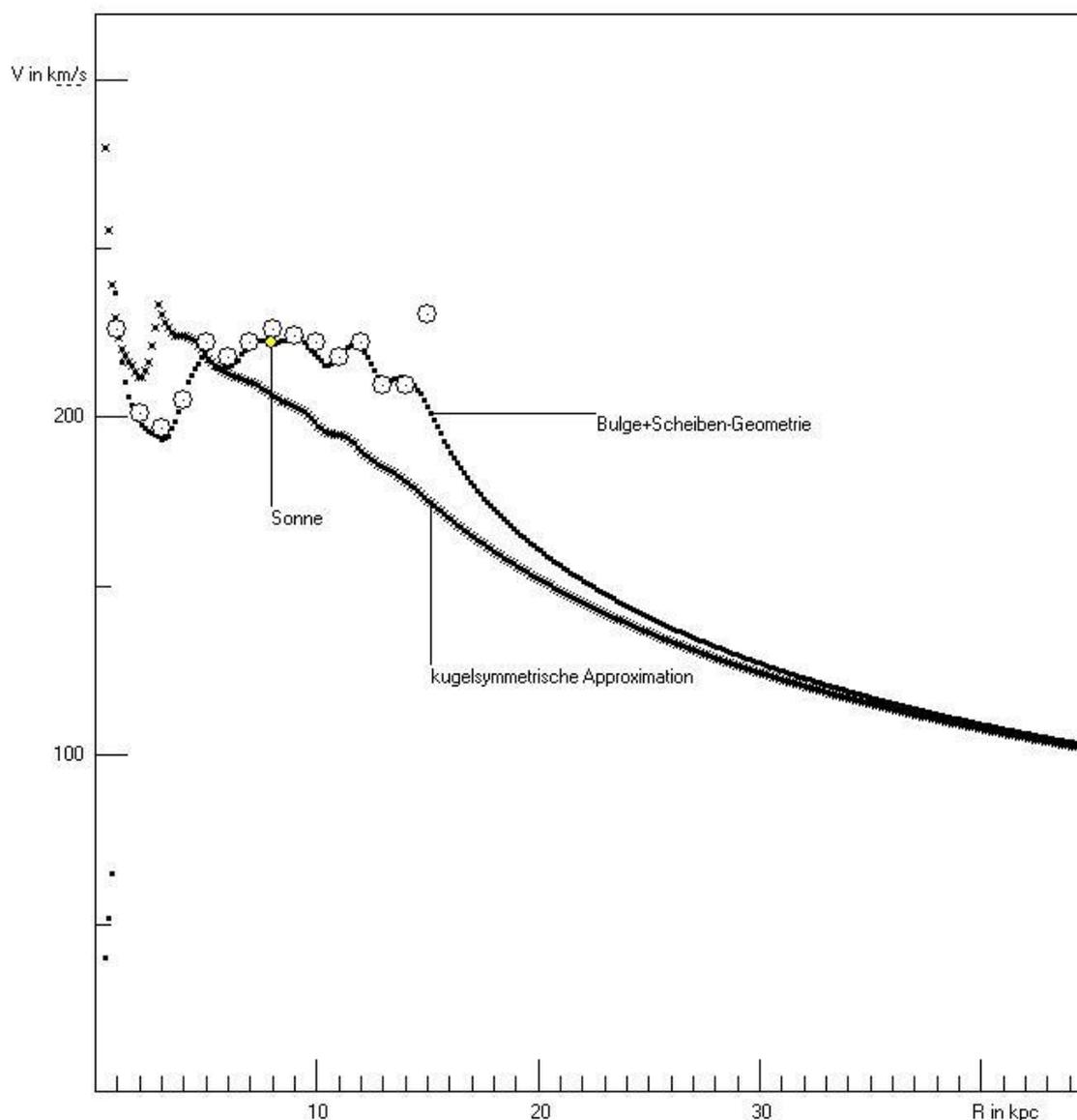


Abbildung 4: Auf Basis der Newtonschen Gravitationstheorie berechnete Rotationskurve der Milchstraßengalaxie (Simulationsparameter siehe Text).

² Bei einer kugelsymmetrischen Approximation werden die Massen, welche sich innerhalb eines bestimmten Radius befinden, als im Zentrum der Kreisbewegung konzentriert gedacht und zugleich werden die Massen außerhalb des Radius bei der Berechnung der Gravitationskräfte nicht berücksichtigt. Diese Approximation ist in einer kugelsymmetrischen Massenverteilung exakt.

Rotationskurve der Milchstraßengalaxie auf Basis der Modifizierten Newtonschen Dynamik (MOND)

Klaus Retzlaff

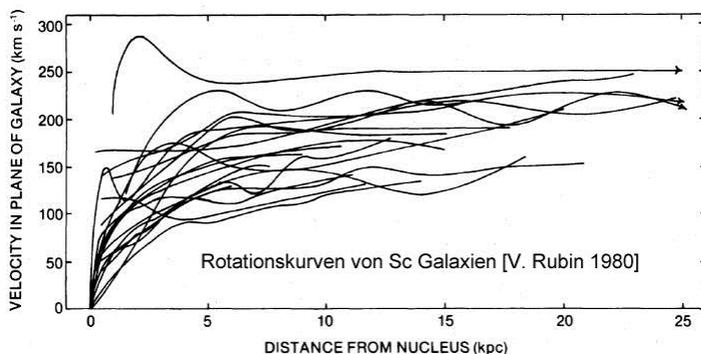
Für Abstände über 15kpc hinaus erfolgte keine sinnvolle Simulation, denn ab 15 kpc ist die Dichte als vernachlässigbar betrachtet worden, was der Realität nicht entsprechen dürfte. Der Sinn einer Simulation in Bereich größerer Abstände wird von mir darum in Zweifel gezogen, weil die Messwerte extrem streuen, es werden Objekte mit sehr hohen Geschwindigkeiten aber auch sehr kleinen Geschwindigkeiten gefunden. Das verweist für mich darauf, dass das Modell einer Kreisbahnbewegung nicht mehr angewendet werden kann und dass es sich um einen Bereich handelt, wo der Einflussbereich der Milchstraße in Wahrheit endet. Es existiert in der Tat kein Beweis, dass die hohen oder niedrigen Geschwindigkeiten dort, ihren Grund in der Struktur der Milchstraße haben.

Für den sinnvoll simulierten Bereich steht die berechnete Rotationskurve in ausgezeichneter Übereinstimmung mit den Daten von Honma und Sofue [6], [7] sowie den weiteren bei diesen Autoren angegebenen Referenzen. Insbesondere die Sonne läuft mit 222.05 km/s um das galaktische Zentrum. Das entspricht praktisch exakt dem aktuellsten genauesten bekanntem Wert [4].

Milgromsche Rotation (MOND)

Es geht um Naturgesetze. Physikalische Theorien sind gedankliche Darstellungen von objektiven Gesetzmäßigkeiten. Wenn es auch nur eine einzige Abweichung von dem theoretisch behaupteten Gesetz gibt, so ist die Theorie widerlegt und das behauptete Gesetz ist unzutreffend.

Bedenkt man den Umstand, dass die Milgromsche Modifizierte Newtonsche Mechanik entwickelt worden ist, um die scheinbar auf Basis der Newtonschen Gravitationstheorie unverständlichen galaktischen Rotationskurven ohne Dunkle Materie zu verstehen, so liegt die Vermutung nahe, dass die Rotationskurve unserer Milchstraßengalaxie in Widerspruch zur Milgromschen Hypothese steht.



Milgrom fragte sich, wie die Newtonsche Dynamik modifiziert werden müsste, um den beobachteten Umstand zu beschreiben, dass auch in sehr großen Entfernungen die Rotationskurven von Galaxien nicht abfallen, sondern nur abflachen.

Abbildung 5: Nicht abfallende galaktische Rotationskurven.

Rotationskurve der Milchstraßengalaxie auf Basis der Modifizierten Newtonschen Dynamik (MOND)

Klaus Retzlaff

Betrachtet man die physikalischen Verhältnisse in hinreichend großer Entfernung, so kann für jede beliebige Massenverteilung die Masse als punktförmig angenommen werden – die Betonung liegt auf: „hinreichend weit entfernte Distanzen ...“

Die Fliehkraft \vec{F}_T liegt im Gleichgewicht mit der Gravitationskraft \vec{F}_G .

$$\vec{F}_G = \vec{F}_T \quad (1)$$

Legt man die Newtonsche Gravitationstheorie zugrunde, so gilt:

$$F_G = m \frac{fM}{r^2} \quad (2)$$

Der entsprechende Betrag der Fliehkraft ergibt sich auf Grund der Radialbeschleunigung zu

$$F_T = ma = m \frac{v^2}{r} \quad (3)$$

Die Gleichgewichtsbedingung (1) führt dann auf:

$$m \frac{fM}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (4)$$

Durch Umstellen der Gleichung (4) nach der Geschwindigkeit ergibt sich:

$$v = \sqrt{\frac{fM}{r}} \quad (5)$$

Man sieht am Ausdruck (5), dass die Geschwindigkeit mit $\propto \frac{1}{\sqrt{r}}$ abfallen müsste. Doch nach den Beobachtungen von Rubin und anderen scheint es sich nicht so zu verhalten, vielmehr scheinen die Rotationskurven in großen Abständen konstant, d.h. flach, zu verlaufen. Milgrom fand es nicht akzeptabel, diesem Umstand einer vermeintlich nicht beobachtbaren ungewöhnlichen zusätzlichen Materie zuzuschreiben. Es wurde argumentiert, dass für sehr kleine Beschleunigungen das Newtonsche Trägheitsgesetz (2. Axiom)

Rotationskurve der Milchstraßengalaxie auf Basis der Modifizierten Newtonschen Dynamik (MOND)

Klaus Retzlaff

$$\vec{F}_T = m\vec{a} \quad (6)$$

nicht gesichert sei und dass für sehr kleine Beschleunigungen an die Stelle des Newtonschen 2. Axioms ein modifiziertes Gesetz treten müsse:

$$\vec{F}_T = m\vec{a}\mu\left(\frac{a}{a_0}\right) \quad (7)$$

Es tritt dabei eine zusätzliche beschleunigungsabhängige Funktion $\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)$ als Faktor auf. Diese Funktion enthält eine neue Naturkonstante a_0 , deren Wert so gewählt wurde, um universell die Rotationskurven zu beschreiben. Damit das gelingt, muss die Funktion $\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)$ die folgende Bedingung erfüllen:

$$\mu\left(\frac{a}{a_0}\right) = \begin{cases} 1, & \text{für } \frac{a}{a_0} \gg 1 \\ \frac{a}{a_0}, & \text{für } \frac{a}{a_0} \ll 1. \end{cases} \quad (8)$$

Da kein physikalisches Prinzip bekannt ist, aus dem sich die Funktion $\mu\left(\frac{a}{a_0}\right)$ ableiten läßt, wurden Ausdrücke gewählt, die näherungsweise die Forderung (8) befriedigen. In der vorliegenden Computersimulation ist die Funktion in der Form:

$$\mu\left(\frac{a}{a_0}\right) = \frac{a}{a_0 + a} \quad (9)$$

gewählt worden. Für die neue Naturkonstante wurde der von Milgrom und anderen bestimmte Wert $a_0 = 1,2 \cdot 10^{-10} \frac{m}{s^2}$ angenommen. Das ist ein sehr kleiner Wert, so dass für die Alltagsphysik die Newtonsche Dynamik problemlos angewendet werden kann, in der kosmischen Physik spielt dieser Wert auf galaktischen und intergalaktischen Skalen aber eine Rolle.

Rotationskurve der Milchstraßengalaxie auf Basis der Modifizierten Newtonschen Dynamik (MOND)

Klaus Retzlaff

Tatsächlich bewirkt diese Modifikation der Newtonschen Dynamik ein abflachendes Verhalten der Rotationskurven. In Analogie zur Beziehung (4) können wir unter Verwendung von (7) schreiben:

$$m \frac{fM}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \mu\left(\frac{a}{a_0}\right) \quad (10)$$

Das ergibt unter Verwendung von (9)

$$m \frac{fM}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \frac{a}{a_0 + a} \quad (11)$$

und für sehr kleine Beschleunigungen a gilt dann:

$$m \frac{fM}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \frac{a}{a_0} \quad (12)$$

Die Beziehung (12) läßt sich nun wieder nach der Kreisbahngeschwindigkeit umstellen und so folgt:

$$v = \sqrt{fMa_0} \quad (13)$$

für die Milgromsche Rotation in großen Distanzen. Für hinreichend große Abstände vom galaktischen Zentrum geht die Rotation gemäß (13) in eine konstante Rotation über, deren Größe allein von der Gesamtmasse der Galaxie, der Gravitationskonstante und der neuen Naturkonstante abhängt.

Würde **MOND** stimmen, wäre dieses Verhalten bedeutsam. Darum sollen hier noch einige Anmerkungen zur Newtonschen Theorie gemacht werden. Das Newtonsche Gravitationsgesetz ist gegenüber alternativen Theorien für die physikalischen Interpretationen im Begriffsrahmen der klassischen Physik ausgezeichnet, weil die Art des Abfalls des Kraftflusses direkt mit den Eigenschaften eines dreidimensionalen homogenen und isotropen euklidischen Raumes zusammenhängt. Anders ausgedrückt, bezüglich einer Punktquelle fällt die Feldstärke so ab, wie die Intensität einer Strahlungsquelle, wenn diese nicht geschwächt wird. Die Newtonsche Gravitationstheorie besagt somit, dass ein von einer Quelle ausgehender „Kraftfluss“ vom dem ihn umgebenden Raum nicht beeinflusst wird. Der Gesamtfluss einer Quelle ist also eine Konstante!

Rotationskurve der Milchstraßengalaxie auf Basis der Modifizierten Newtonschen Dynamik (MOND)

Klaus Retzlaff

Doch die Newtonsche Gravitationstheorie ist bekanntlich nicht unproblematisch. Man denke an die Singularitätsproblematik (Schwarze Löcher) oder an das Gravitationsparadoxon eines unendlichen Gravitationspotentials in einem unendlichen Kosmos mit homogener Massenverteilung. H. v. Seeliger hatte 1894 zur Vermeidung dieses berühmten Paradoxons eine Modifikation der Newtonschen Gravitationstheorie derart vorgeschlagen, dass der leere Raum nicht ein reines Gefäß für den Kraftfluss sei, sondern der Raum den Fluss selbst modifiziert. Seeligers Gravitationstheorie lässt sich so interpretieren, dass der leere Raum bezüglich des Kraftflusses eine Opazität besitzt, d. h., dass der Raum den Kraftfluss schwächt. Modern könnte man sich das so vorstellen, dass ein Teil des Kraftflusses während seiner Ausbreitung im Raum in unbekanntenen Dimensionen „versickert“.

Ich habe dieses Bild des versickernden Kraftflusses vorgetragen, weil so klarer wird, was es bedeutet, wenn der Gravitationsfluss weniger schnell abfällt, als es die Newtonschen Theorie besagt. Das wäre ja der Fall, wenn die Rotationskurven von Galaxien z.B. aus einer alternativen Gravitationstheorie zu erklären wären. Dann wäre es so, als würde der leere Raum, im Gegensatz zu Seeligers Vorstellung, einen zusätzlichen Kraftfluss hervorbringen, als würde in einem Gravitationsfeld jedes Raumelement selbst wie eine kleine Feldquelle wirken.

Ergebnisse der Simulation auf Basis der Modifizierten Newtonschen Dynamik

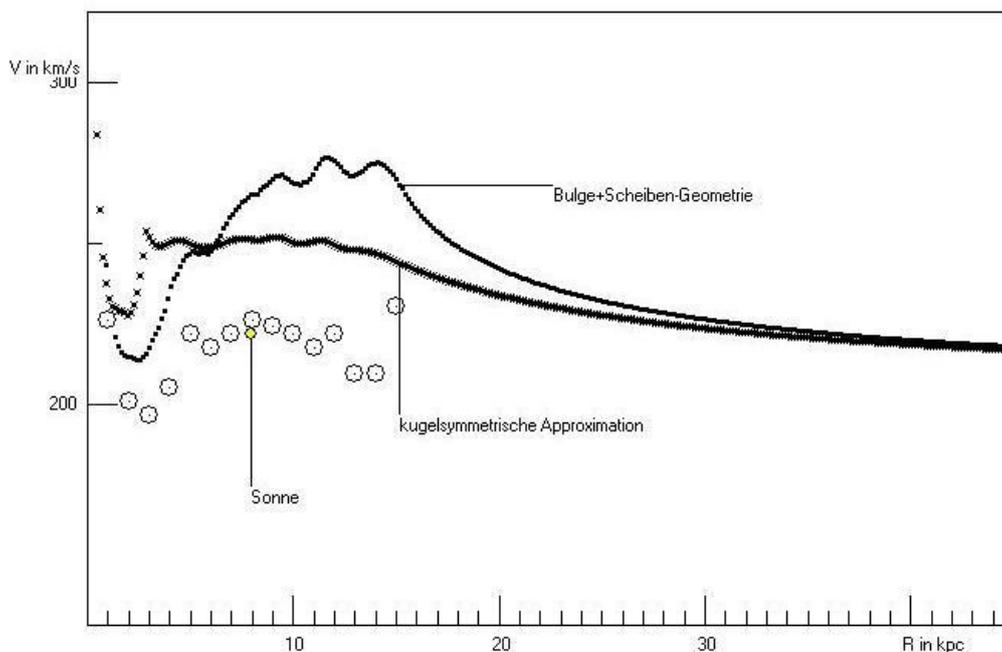


Abbildung 6: Rotationskurve, berechnet auf Basis der Modifizierten Newtonschen Dynamik unter Verwendung der Newtonschen Massendichte für baryonische Materie in der Milchstraße.

Rotationskurve der Milchstraßengalaxie auf Basis der Modifizierten Newtonschen Dynamik (MOND)

Klaus Retzlaff

Wie zu erwarten, führt die Anwendung der Milgromschen Dynamik zu einer Erhöhung der Rotation. Da in dieser Simulation von der Massenverteilung entsprechend Abbildung 2 ausgegangen wurde, ergibt Milgroms Theorie zu hohe Werte für die Rotation (Abbildung 6).

Sowohl der Werte der exakten Rechnung, wie die Werte aus der kugelsymmetrischen Approximation sind zu hoch. Demnach würde die Sonne mit einer Geschwindigkeit von 265km/s um das galaktische Zentrum laufen, statt mit 222km/s – dem aktuell genauesten Wert.

Es ist daher von Bedeutung eine Massendekomposition so vorzunehmen, dass die Milgromsche Rotationskurve mit der gemessenen Rotation übereinstimmt. In der Folge resultiert eine verringerte Gesamtmasse für die Milchstraße und eine damit verbundene geringere Dichte. Wie zu erwarten, stimmt die so bestimmte geringere Dichte nicht mehr mit der Masse der beobachteten Materie überein.

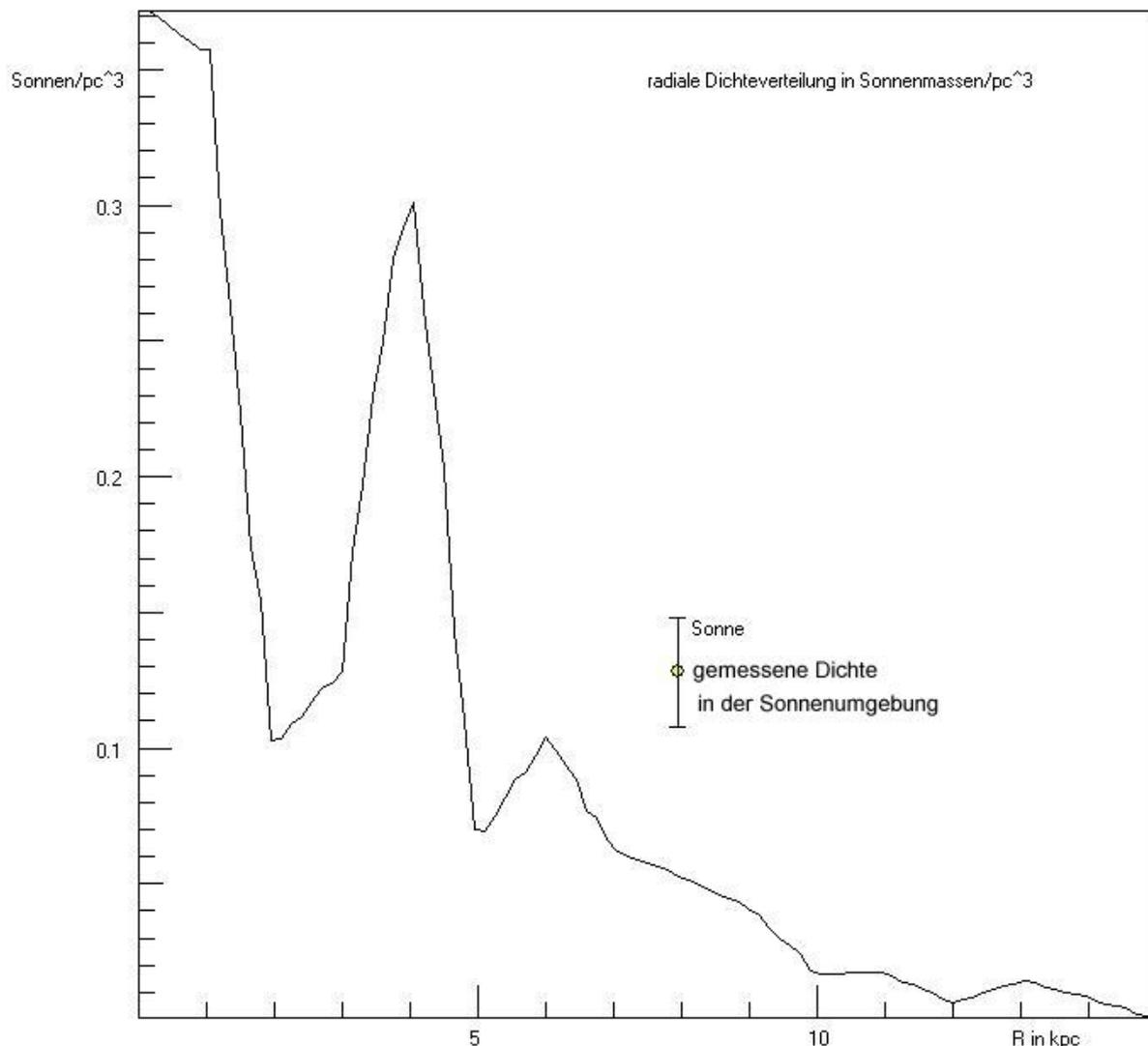


Abbildung 7: Dichteverteilung – berechnet auf Basis der Modifizierten Newtonschen Dynamik. Deutschlich entspricht die berechnete Dichte nicht den beobachteten Werten.

Rotationskurve der Milchstraßengalaxie auf Basis der Modifizierten Newtonschen Dynamik (MOND)

Klaus Retzlaff

Mithin ist die Theorie von Milgrom als widerlegt zu betrachten. Immerhin ist die berechnete Rotationskurve sehr genau an die beobachtete Kurve angepasst worden:

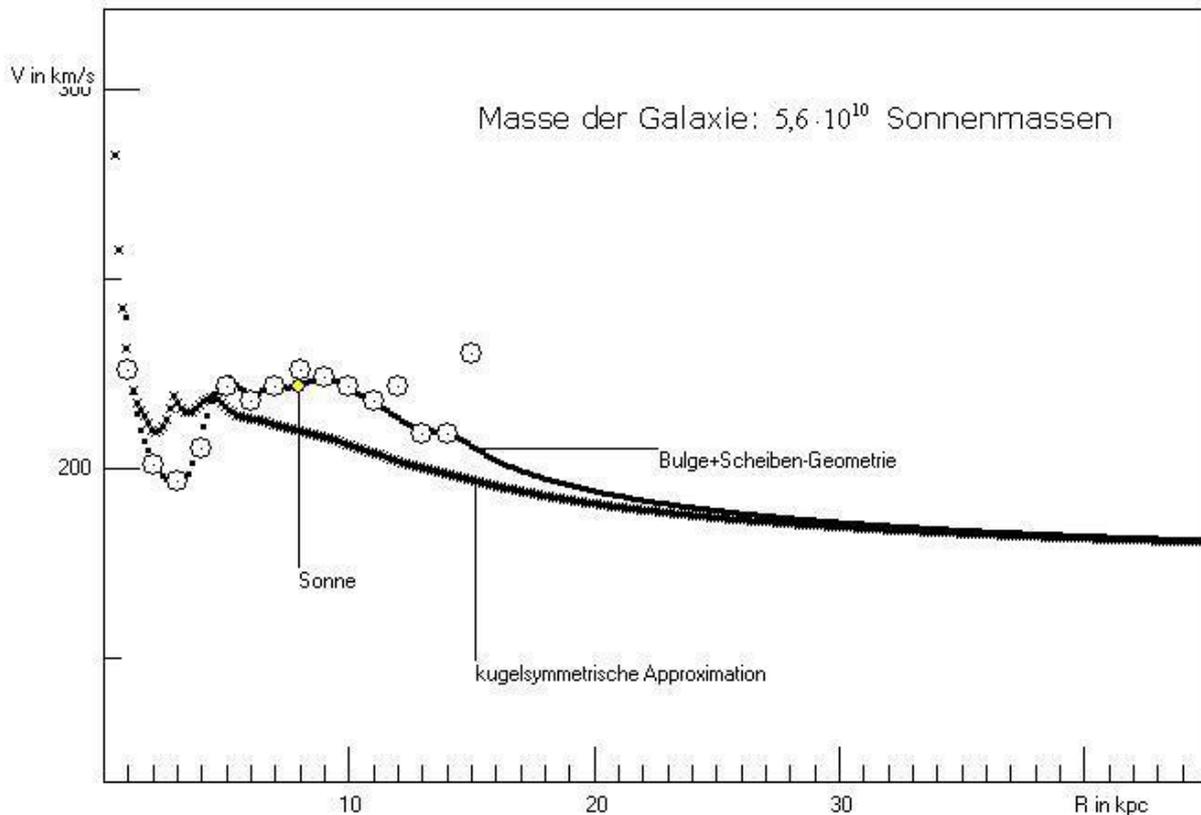


Abbildung 8: Die berechnete Rotationskurve wurde sehr genau an die beobachteten Werte der Rotation angepasst. Das gelang aber nur durch eine erhebliche Absenkung der Gesamtmasse der Galaxie von 108,6 Milliarden auf lediglich 56,0 Milliarden Sonnenmassen und eine Modifikation der lokalen Dichteverteilung entlang des Abstandes vom Zentrum.

Abschließend seien in tabellarischer Form einige Daten verglichen:

Galaktische Daten (Alle Massenangaben in Sonnenmassen)	Beobachtung	Newton-Dynamik	Modifizierte Newtonsche Dynamik
Gesamtmasse (bis 15kpc)	10^{11}	$1,085 \cdot 10^{11}$	$5,6 \cdot 10^{10}$
Masse innerhalb der Sonnenbahn	70%	73,19%	87,53%
Mittlere Dichte in der Sonnenumgebung (Messfehler 25%)	$0,13 \frac{1}{pc^3}$	$0,12 \frac{1}{pc^3}$	$0,05 \frac{1}{pc^3}$

Rotationskurve der Milchstraßengalaxie auf Basis der Modifizierten Newtonschen Dynamik (MOND)

Klaus Retzlaff

Quellen

- [1] Bildquelle: <http://www.digitalskyllc.com> (The image was uploaded to en.wiki at 17:16, 21 September 2006 by [Twtunes](#).)
- [2] M. Milgrom, *Astrophys. J.* 270, 365 (1983).
- [3] S. Gillessen et al.: Monitoring Stellar Orbits Around the Massive Black Hole in the Galactic Center. In: *Astroph. Journ.* Bd. 692, 2009, S. 1075–1109,
- [4] It. Zeitschrift: *Sterne und Weltraum*, Ausgabe 08/2010
- [5] K. Retzlaff, „Die Bedeutung der Geometrie für die galaktische Rotation“, Webseite der Astronomischen Gesellschaft Magdeburg e.V., wissenschaftliche Projekte, 01/2012
- [6] M. Honma, Y. Sofue, *Rotation Curve of Galaxy*, 1997, *PASJ*, 49, 453
- [7] M. Honma, Y. Sofue, *Mass of the Galaxy Inferred from Outer Rotation Curve*, 1996, *Apj*, 360, 505