Das Olberssche Paradoxon

Klaus Retzlaff

Zusammenfassung: In dem folgenden Artikel wird das Olberssche Paradoxon (1862) mathematisch hergeleitet. Auf eine Darstellung der historischen Bedeutung wird verzichtet. Anlass ist die Bitte eines Sternfreundes. Wir geben zunächst eine mit elementaren mathematischen Mitteln leicht nachvollziehbare Näherung an und ergänzen diese sodann mit einer exakten Rechnung.

Ausgangspunkt für die Herleitung des Paradoxons ist die Annahme einer homogenen Sternverteilung im Universum. Heute würde man an die Stelle der Sterne Galaxien oder Galaxienhaufen setzen.
Sofern über einen hinreichend großen Abstand von einer den gesamten Kosmos betreffenden Gleichverteilung der Lichtquellen ausgegangen werden kann, lassen sich die Vorstellungen des Arztes und Amateurastronomen Olbers modern auffassen.
Wir gehen also von einer gleichen Verteilung von im Mittel gleichhellen Lichtquellen im Universum aus. Die Helligkeit einer Durchschnittslichtquelle in einer bestimmten Entfernung sei durch die Beziehung:

$$I = \frac{I_0}{r^2} \qquad (1)$$

beschrieben. Das bedeutet, dass die Helligkeit mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt. Hier wird vorausgesetzt, dass das Licht auf seinem Weg nicht absorbiert wird. Gleichzeitig nimmt aber die Anzahl der Lichtquellen, welche sich in einer Kugel um den Beobachtungsort befinden, mit dem Radius entsprechend der Beziehung:

$$Z = \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \qquad (2)$$

zu. Dabei ist ρ die mittlere Dichte der Strahlungsquellen im Kosmos und $\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ ist das Volumen der Kugel um den Beobachtungsort.

Die Gesamtintensität, welche auf einen Beobachtungsort vom Himmel auftrifft ist dann[1]:

$$I_{gesamt} \approx I \cdot Z\,. \qquad (3)$$

Setzt man die Beziehungen (1) und (2) in die Gleichung (3) ein, so erhält man die Formel:

$$I_{gesamt} \approx \frac{I_0}{r^2} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3\,. \qquad (4)$$

Wir sehen, dass in der Gleichung (4) gekürzt werden kann:

$$I_{gesamt} \approx I_0 \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r\,. \qquad (5)$$

Die Intensität wächst also linear mit dem Radius der betrachteten Kugel an. Wenn nun angenommen wird, dass die Kugel beliebig vergrößert werden kann, weil das Weltall unendlich ist, wenn also der Fall $r \to \infty$ betrachtet wird, dann muss zwangsläufig auch für die Intensität der Himmelsstrahlung $I_{gesamt} \to \infty$ gelten, vorausgesetzt, der Kosmos existiert auch unendlich lange.
Gegen das Paradoxon wurde eingewandt, dass das Licht ja im Laufe seiner Reise auch absorbiert würde und, dass darum doch gar nicht die gesamte Strahlung ankomme. Doch dieser Einwand ist nicht stichhaltig, denn Licht repräsentiert Energie. Absorbiertes Licht heizt das Objekt, von welchem es absorbiert wurde, auf und auf Grund dieser Aufheizung sendet das Objekt dann seinerseits wieder Strahlung aus, so, dass im Mittel genau soviel Strahlung

[1] Das ist nur eine Näherung, die exakte Rechnung steht auf der Folgeseite.

Das Olberssche Paradoxon

Klaus Retzlaff

ausgesendet wird, wie vorher absorbiert wurde.
In der Allgemeinen Relativitätstheorie wird Olbers Paradoxon - der Nachthimmel ist doch gar nicht hell - nur dadurch aufgelöst, dass andere Paradoxien an seine Stelle treten, wie z. B. ein endliches Weltalter.

Exakte Berechnung
Es gilt nach wie vor die Beziehung (1):

$$I = \frac{I_0}{r^2} \qquad (1)$$

Doch die Gesamtintensität berechnet sich

$$I_{gesamt} = \int_0^R dI \qquad (2a)$$

als Integral über die Intensitäten aller Sterne, die sich in einer dünnen Kugelschale mit der Dick dr in einem Abstand r vom Beobachter befinden. Da die Dicke dieser Kugelschale sehr, sehr dünn ist, ist die Anzahl dz der Sterne in der Kugelschale proportional zur Kugeloberfläche und es gilt:

$$dz = \rho \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr\ . \qquad (3a)$$

Die Lichtmenge, die in einer Zeit von der dünnen Kugelschale zum Beobachter gesendet wird, ist dann:

$$dI = I(r) \cdot dz = \frac{I_0}{r^2} \cdot \rho \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot dr\ . \qquad (4a)$$

Wie leicht zu erkennen ist, kürzt sich das Radiusquadrat heraus und es ergibt sich:

$$dI = I_0 \cdot \rho \cdot 4 \cdot \pi \cdot dr\ . \qquad (5a)$$

Setzen wir nun dieses Ergebnis in die Gleichung (2a) ein, so erhalten wir das Integral:

$$I_{gesamt} = \int_0^R dI = \int_0^R I_0 \cdot \rho \cdot 4 \cdot \pi \cdot dr\ . \qquad (6a)$$

Im Integral stehen ausschließlich konstante Größen, die vor das Integral gezogen werden können und es ergibt sich:

$$I_{gesamt} = I_0 \cdot \rho \cdot 4 \cdot \pi \cdot \int_0^R dr\ . \qquad (7a)$$

$$I_{gesamt} = I_0 \cdot \rho \cdot 4 \cdot \pi \cdot R$$

Vergleichen wir die Beziehung (7a) mit unserer Näherung (5), so sehen wir, dass der Unterschied zur exakten Rechnung ein Faktor 3 ist. Bei einem Grenzübergang für ein unendliches Universum, d.h. mit $R \to \infty$, ist dieser Faktor aber völlig unwichtig. In jedem Fall ist die Strahlungsmenge unendlich, weil ja der Radius R gegen unendlich geht.