

Messung des Erdradius, der Erdmasse und der Erddichte mittels einer Pendeluhr in unterschiedlicher Höhe – Untersuchung der Machbarkeit

Klaus Retzlaff

Projekt: In einem evakuierten Behälter wird die vom Magdeburger Uhrmachermeister, Herrn Joachim Hoppe, rekonstruierte und funktionsfähige Otto-von-Guericke-Uhr platziert. Mittels einer Laserlichtschranke wird über einen Zeitraum von einem Monat der Takt der Uhr am Fuße des Magdeburger Doms gemessen und gemittelt, die zweite Messung erfolgt analog an der höchst möglichen Stelle des Doms. Nach Bekanntgabe der Ergebnisse, die zeigen sollen, was mit Ottos Uhr möglich ist, wird die Uhr offiziell an die Otto-von-Guericke-Gesellschaft übergeben. Alternativ ist es aber auch möglich, zuerst die Übergabe durchzuführen und dann, ebenfalls öffentlichkeitswirksam, das Experiment durchzuführen. Das Projekt hat einen doppelten Otto-von-Guericke-Bezug von planetarischer Dimension und ist daher als schönes Gemeinschaftsprojekt zwischen der Otto-von-Guericke-Gesellschaft, der Astronomischen Gesellschaft Magdeburg, und der Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg geeignet. Zugleich dient dieses Experiment dazu, andere Menschen für die Physik zu begeistern.

Zusammenfassung: Die Untersuchung über die Machbarkeit beschränkt sich auf die Abschätzung des physikalisch zu erwartenden Effektes und die Fehlerabschätzung, nicht aber auf technische, organisatorische oder finanzielle Fragen. Für die Beschleunigungsdifferenz ergibt sich ein Effekt von $\approx 0,3\text{mm}^2\text{s}^{-2}$, der Einfluss der Dommasse von 2% auf die Fallbeschleunigung kann vernachlässigt werden. Die Schwingungsdauer liegt bei $\approx 0,75\text{s}$. Der gemittelte durchschnittliche Gangunterschied beträgt $\approx 8,5 \cdot 10^{-6}\text{s}$ und bewirkt, dass die Uhr am Fuße des Magdeburger Doms innerhalb eines Monats 39 Takte öfter schlägt als die Uhr in der Höhe. Damit ist prinzipiell ein Effekt sichtbar, wobei die Messgenauigkeit ein Halbtakt ist, da das Pendel den Lichtweg während eines Taktes zweimal unterbricht.



Magdeburger Dom, Foto des Autors

Die theoretischen Grundlagen des Experimentes sind in [1] beschrieben. Aus dieser Arbeit sind auch alle notwendigen Formeln entnommen, das sind:

1. die Formel für die Bestimmung der Fallbeschleunigung aus der Schwingungsdauer:

$$g(R) = 4 \cdot \pi^2 \frac{l}{\tau^2}, \quad (1)$$

2. die Formel für die Bestimmung des Gangunterschiedes

$$\Delta\tau = \tau(R+h) - \tau(h) \quad (2)$$

mit

$$g_0 = f \frac{M}{R^2} \quad (3)$$

$$g_h = f \frac{M}{(R+h)^2}$$

$$\Delta\tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{l} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{g_h}} - \frac{1}{\sqrt{g_0}} \right) \quad (4)$$

Messung des Erdradius, der Erdmasse und der Erddichte mittels einer Pendeluhr in unterschiedlicher Höhe – Untersuchung der Machbarkeit

Klaus Retzlaff

3. die Formel für die Bestimmung der Erdmasse aus der Höhendifferenz h der Messpunkte und des Gangunterschiedes:

$$M = \frac{l}{f} \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot h}{\Delta \tau} \right)^2, \quad (5)$$

4. die Formel für die Bestimmung des Erdradius aus der Höhendifferenz, der Schwingungsdauer am Fuße des Doms sowie dem Gangunterschied¹:

$$R = h \frac{\tau}{\Delta \tau}, \quad (5)$$

5. die Formel für die Bestimmung der mittleren Dichte der Erde aus den selben Größen:

$$\rho = 3 \cdot \pi \frac{l}{f} \frac{\Delta \tau}{h \tau^3}. \quad (6)$$

Wir beginnen mit der Abschätzung der Effekte.

Parameter

Diesen Untersuchungen legen wir die folgenden Parameter zugrunde:

Gravitationskonstante

$$f = (6,67 \pm 0,007) \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$$

Erdradius

$$R = (6,37 \pm 0,01) \cdot 10^6 m$$

Höhe

$$h = (70,00 \pm 0,01) m$$

¹ Diese Formel ist in [1] nicht explizit angegeben, wurde hier aber unter Zugrundelegung von [1] hergeleitet.

Erdmasse

$$M = (5,979 \pm 0,001) \cdot 10^{24} kg$$

Effekte

Fallbeschleunigungen

Für die Fallbeschleunigungen g_0 und g_h erhalten wir:

$$g_0 = f \frac{M}{R^2} = 9,82834 \frac{m}{s^2}$$

$$g_h = f \frac{M}{(R+h)^2} = 9,828018 \frac{m}{s^2}$$

Die Wirkung der Höhendifferenz auf die Fallbeschleunigung zeigt sich in der 3. Nachkommastelle, präziser ausgedrückt in einem Bereich von der

Größenordnung $\Delta g \approx 0,3 \frac{mm}{s^2}$. Angesichts

der Kleinheit dieses Effektes ist zu prüfen, ob die Masse vom Magdeburger Dom, konkret der beiden Türme einen relevanten Einfluss auf die Messung haben kann.

Einfluss der Dommasse auf die Messung

Wir betrachten für diese Abschätzung nur einen Turm und nehmen dessen Einfluss doppelt. Man muss aber zusätzlich bedenken, dass am Fuße des Doms die Turmmasse sich hauptsächlich über dem Messpunkt befindet. Damit mindert die Dommasse die Fallbeschleunigung g_0 um einen gewissen Betrag δg , während die Dommasse im selben Maße die Fallbeschleunigung g_h um denselben Betrag erhöht, d.h. die Dommasse mindern den gesuchten Effekt.

Für eine Maximalabschätzung legen wir eine quadratische Grundfläche von $\approx 225 m^2$ zugrunde. Mit der Höhe h ergibt sich ein Volumen von $\approx 15.750 m^3$. Wählen wir eine Dicht

Messung des Erdradius, der Erdmasse und der Erddichte mittels einer Pendeluhr in unterschiedlicher Höhe – Untersuchung der Machbarkeit

Klaus Retzlaff

von $0,317 \frac{t}{m^3}$ (Gestein ist zwar schwerer, aber wir müssen die Hohlräume einbeziehen), dann können wir die Turmmasse auf rund 5000 Tonnen schätzen. Eine grobe Abschätzung liefert einen Effekt in der Größenordnung von $\approx 6 \cdot 10^{-6} \frac{m}{s^2}$, das entspricht einer Verkleinerung der gemessenen Fallbeschleunigung $\approx 0,006 \frac{mm}{s^2}$ am Boden des Doms oder einer Vergrößerung in der Höhe, d.h. er beträgt 2% und kann vernachlässigt werden.

Periodendauer und Gangunterschied

Für die Periodendauer am Boden bei einer Pendellänge von 14cm ergibt sich:

$$\tau_0 = 0,749904(5)s$$

$$\tau_h = 0,749913(0)s$$

$$\Delta\tau = 8,5 \cdot 10^{-6} s$$

Taktzahlen für einen Monat

Ein Monat von 30 Tagen hat dauert $2,592 \cdot 10^6 s$ und für diesem Zeitraum ergeben sich die Taktzahlen:

$$k_0 = 3,456440 \cdot 10^6$$

$$k_h = 3,456401 \cdot 10^6 .$$

$$\Delta k = 39$$

Die Uhr am Boden des Magdeburger Doms schlägt innerhalb eines Monats 39 Takte mehr, als die Uhr in der Höhe.

Da das Pendel die Lichtschranke während eines Taktes zweimal unterbricht, werden 78 Unterbrechungen vom Zählwerk registriert, wenn sich alle periodischen oder a-periodischen Störeinflüsse über die Zeit herausmitteln. Die Genauigkeit ist damit ein Halbtakt.

Laufzeitunterschied für einen Monat

Die 39 Takte Unterschied entsprechen einer Zeitdifferenz von

$$\Delta T = 29,246 \frac{s}{\text{Monat}} .$$

Quellen

[1] K. Retzlaff, Astronomische Gesellschaft Magdeburg, „Was eine Pendeluhr mit Geo- und fundamentaler Gravitationsphysik verbindet“ 3/2013