Massenmittelpunkt und Gravitationspunkte in Vielteilchensystemen

Klaus Retzlaff

Zusammenfassung: In einem allgemeinen Vielteilchensystem fallen der Massenmittelpunkt oder Schwerpunkt und der Punkt in welchen die Gesamtmasse angeordnet gedacht werden kann, um die gleiche Schwerkraft, bzw. Feldstärke hervorzurufen, wie sie von dem verteilte Gesamtsystem in einem Aufpunkt erzeugt wird, auseinander. Aus diesem Grund kann z.B. die Rotation der Sterne um das galaktische Zentrum nicht dadurch beschrieben werden, dass man rechnerisch die Gesamtmasse innerhalb der Bahn oder die Gesamtmasse der Galaxie im Zentrum vereinigt. Der Punkt, in welchem die Gesamtmasse oder eine definierte Teilmenge als Massengesamtheit vereinigt gedacht werden kann, wird im Folgenden als Gravitationspunkt (GP) bezeichnet. Der GP wird für den allgemeinen Fall berechnet.

Einleitung

Für Computersimulationen gravitierender Vielteilchensystem ist die Einführung eines GP irrelevant. Der GP ist ein fiktiver Punkt. Seine Funktion besteht darin, das Verhalten von Vielteilchensystemen besser zu verstehen und zu analysieren.

Bei Anwendung auf konkrete Systeme, wie zum Beispiel der Galaktischen Scheibe, erkennt man, dass es falsch ist, die Masse aus dem Innenbereich der Bahn eines Sterns oder der Sonne rechnerisch ins Zentrum der Galaxie zu verlegen. In diesem Fall, wird der GP auf der Verbindungslinie von Stern und galaktischem Zentrum liegen. Diese Feststellung erklärt, warum die Umlaufgeschwindigkeit des Sterns höher ist, als es sich ergeben würde, wenn die Masse im galaktischen Zentrum vereinigt wäre. Dabei verhält es sich so, dass sich der GP mit dem Stern mitbewegt, d.h., dass er die gleiche Winkelgeschwindigkeit hat, wie der Stern. Das erinnert an die Liberationspunkte der Planeten, die sich mit dem Planeten mitbewegen. Bezieht man die Gesamtmasse der Galaxie ein, so ergibt sich ein GP auf der bezogen auf das Zentrum gegenüberliegenden Seite des Sterns. Das bringt zum Ausdruck, dass Massen in einem Bestimmten Bereich außerhalb der Bahn des Sterns, die Geschwindigkeit des Sterns absenken – gegenüber dem Fall, dass die Außenmassen unberücksichtigt bleiben.

Wenn der GP nicht invariant gegenüber Ortsänderungen des Aufpunktes ist, darf rechnerisch die Masse des Systems nicht in den Schwerpunkt verlegt werden.

Herleitung des GP

Die gravitative Feldstärke an einem bestimmten Punkt A in einer beliebigen Verteilung von Massenpunkten ist bestimmt durch die Beziehung:

$$\vec{G}(\vec{r}_A) = \gamma \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{r_{iA}^3} \vec{r}_{i,A} \qquad (1)$$

Massenmittelpunkt und Gravitationspunkte in Vielteilchensystemen

Klaus Retzlaff

mit $\vec{r}_{i,A} = \vec{r}_i - \vec{r}_A$. Wir wollen den Punkt bestimmen, in welchem die Gesamtmasse der Massenverteilung gedacht werden kann, um die gleiche Feldstärke zu erzeugen. Wir definieren diesen GP genannten Ort durch die Beziehung:

$$\vec{G}(\vec{r}_{GP}) = \gamma \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i}{r_{GP}^3} \vec{r}_{GP} \qquad (2)$$

und der Bedingung:

$$\vec{G}(\vec{r}_{GP}) = \vec{G}(\vec{r}_A) \qquad (3)$$

Weiter führen wir die folgende Bezeichnung der Komponenten der Ortsvektoren ein:

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \qquad (4)$$

und für die Differenzen:

$$\vec{r}_{i,A} = \begin{pmatrix} x_i - x_A \\ y_i - y_A \\ z_i - z_A \end{pmatrix} \qquad (5).$$

In kartesischen Koordinaten gilt:

$$r_{GP} = \sqrt{x_{GP}^2 + y_{GP}^2 + z_{GP}^2} \qquad (6).$$

Die Bedingung (3) führt auf das folgende Gleichungssystem für die Vektorkomponenten des Ortsvektors des GP:

$$\begin{aligned} x_{GP} \frac{M}{r_{GP}^3} &= A_X \\ y_{GP} \frac{M}{r_{GP}^3} &= A_Y \\ z_{GP} \frac{M}{r_{GP}^3} &= A_z \end{aligned} \qquad (7)$$

dabei ist $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ die Gesamtmasse und für die Komponenten gilt:

$$\begin{aligned} A_x &= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{r_{i,A}^3} x_{i,A} \\ A_y &= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{r_{i,A}^3} y_{i,A} \\ A_Z &= \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{r_{i,A}^3} z_{i,A} \end{aligned} \qquad (8)$$

Zusammen mit (6) ist der GP durch das Gleichungssystem (7) eindeutig bestimmt.

Wir formen (7) zunächst um:

$$\begin{aligned} x_{GP} &= \frac{A_x}{M} r_{GP}^3 \\ y_{GP} &= \frac{A_y}{M} r_{GP}^3 \\ z_{GP} &= \frac{A_z}{M} r_{GP}^3 \end{aligned} \qquad (9)$$

Dann wird (9) quadriert:

Massenmittelpunkt und Gravitationspunkte in Vielteilchensystemen

Klaus Retzlaff

$$x_{GP}^2 = \left(\frac{A_x}{M}\right)^2 r_{GP}^6$$

$$y_{GP}^2 = \left(\frac{A_y}{M}\right)^2 r_{GP}^6 \qquad (10).$$

$$z_{GP}^2 = \left(\frac{A_z}{M}\right)^2 r_{GP}^6$$

Wir bilden mit (10) die Summe, das ist:

$$r_{GP}^2 = r_{GP}^6\left(\left(\frac{A_x}{M}\right)^2 + \left(\frac{A_y}{M}\right)^2 + \left(\frac{A_Z}{M}\right)^2\right) \qquad (11)$$

Die Beziehung (11) führ uns auf:

$$r_{GP} = \sqrt[4]{\frac{M^2}{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \qquad (12)$$

und damit sind die Koordinaten mittels (9) berechenbar.