Rätselhaftes über Schwarze Löcher und das Universum – die kritische Dichte

Klaus Retzlaff

Zusammenfassung: Die kritische Dichte ist eine Dichte, deren Überschreitung zur Bildung eines schwarzen Loches führt. Bei der Betrachtung der kritischen Dichte für verschiedene Objekte, ergeben sich überraschend geringe Werte, je nach Objektgröße. Unter anderem wird die kritische Dichte des beobachtbaren Universums betrachtet – das Resultat ist unerwartet und rätselhaft.

Schwarze Löcher sind sowohl eine Konsequenz der Newtonschen, als auch der Einsteinschen Gravitationstheorie. Die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist die höchste Geschwindigkeit in der Natur. Das ist eine der sichersten Grundlagen der Physik. Legt man die Newtonsche Gravitationstheorie zugrunde und setzt die Fluchtgeschwindigkeit für eine kugelsymmetrische Massenverteilung gleich der Lichtgeschwindigkeit[1], so findet man die Beziehung:

$$c = \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{R_0^{Newton}}} \qquad (1)$$

Die Lichtgeschwindigkeit ist hier gleich der 2. kosmischen Geschwindigkeit. M ist die Gesamtmasse und R_0 ist der Gravitationsradius. Die Gleichung

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2M\gamma}{c^2 R}} + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta) d\varphi - (1 - \frac{2M\gamma}{c^2 R}) c^2 dt^2 \qquad (2)$$

beschreibt in der Einsteinschen Allgemeinen Relativitätstheorie die Geometrie einer kugelsymmetrischen Massenverteilung aus der Sicht eines äußeren Beobachters. Es handelt sich um die berühmte Schwarzschild-Lösung[2] der Einsteinschen Feldgleichungen. Untersucht man diese Metrik auf Polstellen, so findet man diese im 1. Term, wenn der Nenner Null wird:

$$1 - \frac{2M\gamma}{c^2 R_0^{Einstein}} = 0 \qquad (3)$$

Formt man diesen Ausdruck nach der Lichtgeschwindigkeit um, findet man:

$$c = \sqrt{\frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{R_0^{Einstein}}} \,. \qquad (4)$$

Die Übereinstimmung von (1) und (4) ist sofort zu sehen. Das heißt, die Metrik (2) hat eine Singularität genau unter den Bedingungen, die im Rahmen der Newtonschen Theorie kein Licht aus dem Inneren des Gravitationsradius R_0 mehr entweichen lassen. Das ist natürlich auch bei Einstein so. Die Gravitationsradien stimmen in beiden Theorien überein.

$$R_0 = R_0^{Newton} = R_0^{Einstein} = \frac{2 \cdot \gamma \cdot M}{c^2} \qquad (5)$$

[1] Es ist hier stets die Vakuumlichtgeschwindigkeit gemeint.

[2] Die Schwarzschild-Lösung wurde bereits 1916 von Karl-Schwarzschild gefunden.

Rätselhaftes über Schwarze Löcher und das Universum – die kritische Dichte

Klaus Retzlaff

Genau an dieser Stelle verschwindet andererseits die Zeit-Zeit-Komponente des metrischen Tensors, d.h. für einen äußeren Beobachter der Prozesse gefrieren die Abläufe am Gravitationsradius ein, die Zeitdehnung ist unendlich. Doch die Eigenschaften der Metrik sollen hier nicht weiter besprochen werden. Halten wir nur fest: Da nichts schneller ist als das Licht, kann nichts den Gravitationsradius verlassen. Schwarze Löcher sind die Konsequenz sowohl der Newtonschen als auch der Einsteinschen Gravitationstheorie.

Wir möchten anmerken, dass in den Zentren der Galaxien die Existenz schwarzer Löcher behauptet wird. Mit Sicherheit existieren dort Objekte, die man als superdicht bezeichnen kann, ob es sich im Sinne der Theorie um Schwarze Löcher handelt, kann aber nicht einfach behauptet werden. Einstein sah die mit den Singularitäten[3] verbundenen unphysikalischen Zustände immer für problematisch an und war der Überzeugung, dass seine Theorie in so starken Gravitationsfeldern ihre Gültigkeit nicht mehr behaupten dürfe. In der Tat gibt es andere Gravitationstheorien, wo diese Polstellen nicht auftreten[4]. Man sollte daher nicht leichtfertig von Schwarzen Löchern reden.

Hier werden wir eine andere Konsequenz der Newton-Einsteinschen Gravitationstheorie untersuchen. Wir wollen der Frage nachgehen, wie hoch die kritischen Dichten sein können, die zur Bildung eines Schwarzen Lochs führen würden, wenn wir die volle Gültigkeit der Newton-Einsteinschen Gravitationstheorie unterstellen.

Für diese Untersuchung gehen wir von einer kugelsymmetrischen Verteilung der Massen aus. Das Volumen dieser Verteilung ist einfach das Kugelvolumen:

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot R^3 \qquad (6)$$

R ist hier zunächst ein beliebiger Radius. Setzen wir aber den Gravitationsradius ein, so ergibt sich ein entsprechendes Volumen V_0, das wir durch den Index kennzeichnen:

$$V_0 = \frac{4}{3}\pi \cdot R_0{}^3 \qquad (7)$$

Damit können wir die mittlere kritische Dichte definieren:

$$\rho_0 = \frac{M}{V_0} = \frac{3 \cdot M}{4 \cdot \pi \cdot R_0^3}\,. \qquad (8)$$

Aus einer gegebenen Masse und dem ihr nach Newton, bzw.

[3] Die Singularität am Gravitationsradius kann weg transformiert werden – ein in das Schwarze Loch stürzender Beobachter bemerkt am Schwarzschildradius keine Besonderheit. Diese Singularität ist nicht das Problem, das Problem ist die nicht vermeidbare Singularität im Zentrum, die beim Gravitationskollaps auftritt.

[4] Beispiele sind die Bezugstetradentheorie oder die Trägheitsfreie Mechanik von Treder. In diesen Theorien gibt es Selbstabschirmungseffekte, die das Gravitationsfeld limitieren.

Rätselhaftes über Schwarze Löcher und das Universum – die kritische Dichte

Klaus Retzlaff

Einstein zugeordneten Gravitationsradius läßt sich mittels (8) die kritische Dichte bestimmen. In der folgenden Tabelle stellen wir die Daten für die folgenden Objekte zusammen.

Tabelle: Die Masse, Gravitationsradius und kritische Dichte für verschiedene Objekte des Universums und das Universum selbst..

Objekt	M in kg	R_0 in m	ρ_0 in kg/m^3
Elektron	$9{,}11 \cdot 10^{-31}$	$1.352 \cdot 10^{-57}$	$8{,}798 \cdot 10^{+139}$
Proton	$1{,}67 \cdot 10^{-27}$	$2{,}483 \cdot 10^{-54}$	$2{,}609 \cdot 10^{+133}$
Erde	$5{,}979 \cdot 10^{+24}$	$8{,}874 \cdot 10^{-3}$	$2{,}042 \cdot 10^{+30}$
Sonne	$1{,}985 \cdot 10^{+30}$	$2{,}946 \cdot 10^{+3}$	$1{,}853 \cdot 10^{+19}$
Milchstraße bis 15 kpc	$2{,}157 \cdot 10^{+41}$	$3{,}167 \cdot 10^{+14}$	$1{,}574 \cdot 10^{-3}$
Kosmos (A)	$\approx 10^{+52}$	$1{,}484 \cdot 10^{+25}$	$7{,}3 \cdot 10^{-25}$
Kosmos (B)	$\approx 10^{+53}$	$1{,}484 \cdot 10^{+26}$	$7{,}3 \cdot 10^{-27}$
Kosmos (C)	$\approx 10^{+54}$	$1{,}484 \cdot 10^{+27}$	$7{,}3 \cdot 10^{-29}$

Die Masse des beobachtbaren Universums kann nur grob abgeschätzt werden, sie liegt im Bereich zwischen $10^{52} kg$ und $10^{54} kg$.

Der Wert von $10^{53} kg$ ist der wahrscheinlichste.

Zunächst bemerken wir bei der Betrachtung der Werte, dass mit zunehmender Objektgröße die kritische Dichte immer weiter abnimmt.

Der Gravitationsradius der Elementarteilchen liegt deutlich unter der Compton-Wellenlänge dieser Teilchen

$$\lambda_C = \frac{h}{m \cdot c}. \qquad (9)$$

Die Compton-Wellenlänge ist für das Elektron $\approx 2{,}246 \cdot 10^{-12} m$ und für das Proton $\approx 1{,}321 \cdot 10^{-15} m$.

Für die Erde und die Sonne sind die kritischen Dichten noch extrem hoch.

Legt man eine Hubbel-Konstante von $H_0 \approx 72 \frac{km}{s \cdot Mpc}$ zugrunde und bestimmt daraus das Weltalter und den Weltradius, so findet man für den Weltradius $\approx 1{,}269 \cdot 10^{26} m$.

Die mittlere Dichte im Universum wird in verschiedenen Quellen zwischen

$10^{-27} ... 5 \cdot 10^{-27} \, kg/m^3$ geschätzt.

Dieses Resultat für den Kosmos[5] ist einigermaßen erstaunlich und rätselhaft, denn diese Werte stimmen ja recht genau mit den Werten für den errechneten

[5] Auf die Idee für diese Rechnung bin ich durch einen Hinweis aus dem sehr lesenswerten Buch „Vom Urknall zum Durchknall“ von Alexander Unzicker gekommen, der dort auf diesen Tatbestand hingewiesen hat – so habe ich einfach nachgerechnet.

Gravitationsradius und den Wert der kritischen Dichte für einen Gravitationskollaps überein. Wie kommt es zu dieser eigenartigen Korrelation? Welche Bedeutung hat sie?