# Vom Newtonschen Gravitationsparadoxon zur singularitätsfreien allgemein-relativistischen Gravitationstheorie

Klaus Retzlaff

*Zusammenfassung: Die singularitätsfreie allgemein-relativistische Gravitationstheorie (SARG) ist eine im Entstehen begriffene Gravitationstheorie. Es werden die historisch-physikalischen Gründe dargelegt, aus welchen sie entwickelt wird, um eine Revision der aktuellen Gravitationsphysik, die ja durch die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) dominiert ist, vorzunehmen. Da sich bereits gleich zu Beginn ihrer Ausarbeitung die fundamentale Tragweite ihrer Aussagekraft offenbarte, erschien es dem Autor der singularitätsfreien allgemein-relativistischen Gravitationstheorie wichtig, diese historische Dimension noch vor der vollendeten Ausarbeitung – weil das noch einige Zeit dauern dürfte – darzulegen, weil sich bereits mitten in der Arbeit abzeichnete, dass sie die Einstein'sche Allgemeine Relativitätstheorie ablösen wird, weil sie über eine höhere empirische Evidenz als die ART verfügt, denn sie erklärt nicht nur die Einstein'schen Effekte im Planetensystem korrekt, sondern sie modifiziert auch die Gravitation - ohne das beabsichtigt zu haben - dahingehend, dass die Einführung einer zusätzlichen nicht-baryonischen hypothetischen Materie (Dunkle Materie) überflüssig wird, wobei sie zugleich mit Ausnahme des starken Äquivalenzprinzips der ART, kein anderes physikalisches Prinzip verletzt. An die Stelle des starken Äquivalenzprinzips tritt ein mathematisch definiert eingeführtes Prinzip der Selbstabschirmung der Gravitation, ohne dass irgendeine neue Naturkonstante oder ein freier Anpassungsparameter eingeführt werden muss.*

***

**Einleitung**

Die Entdeckung der drei Keplerschen Gesetze bildete im Verbund mit den drei Newtonschen Axiomen der Mechanik das theoretische Fundament für die Newtonsche Gravitationstheorie. Newton formulierte das Gravitationsgesetz als Kraftgesetz. Damit war erstmals ein empirisch begründetes Fundament zur Erklärung der Physik des Kosmos entstanden, welches die rein formale und nicht auf Prinzipien gegründete Beschreibung der Planetenbewegung durch die Epizykeln zu ersetzen vermochte. Doch eine Physik der Prinzipien verlangt universelle Gültigkeit. Die Ausdehnung der Newtonschen Gravitationstheorie auf den gesamten Kosmos in Verbindung mit der Forderung, dass kein Weltpunkt und keine Richtung ausgezeichnet werden darf (Nicolaus von Cues, 1440, „De Docta Ingnoratia"), führt auf unbestimmbare, weil unendliche, Teilchengeschwindigkeiten. Das geschieht, weil sowohl das kosmische Gravitationspotential, als auch die kosmische Gravitationsfeldstärke bei einer beliebig kleinen und im Mittel konstanten endlichen Massendichte in einem unendlichen Kosmos über alle Schranken anwachsen. Historisch schien es zunächst so, als würde die Einstein'sche Allgemeine Relativitätstheorie eine Abhilfe in Aussicht zu stellen, weil sie durch die Modernisierung der physikalischen Fundamente, d.h. durch die Korrektur alter und die Aufnahme neuer Prinzipien in die Physik, auf einen Expansionskosmos führte, in welchem zunächst ein Unendlichwerden aller Bewegungen vermeidbar erschien. Doch an die Stelle des Newtonschen Gravitationsparadoxons trat die Notwendigkeit der Akzeptanz von unphysikalischen Zuständen. Bezogen auf den Kosmos war zu akzeptieren, dass es einen Anfang von Raum und Zeit zusammen mit dessen materiellem Inhalt gegeben haben musste – einen Urknall, dessen physikalischer Zustand unberechenbar ist. In Bezug auf das zentralsymmetrische Gravitationsfeld war zu akzeptieren, dass die Materie eine kritische Dichte erreichen konnte, in der die Gravitation alle anderen Kräfte derart dominieren konnte, dass diese Materie in einer raum-zeitlichen Singularität das Ende jeder Berechenbarkeit finden konnte – Schwarze Löcher. Darüber hinaus war es nicht möglich, Bewegungen von Objekten in übergalaktischen Entfernungen ohne die Annahme nicht beobachtbarer so genannter Dunkler Materie zu beschreiben. Last but not least, sperrte sich die ART der Möglichkeit einer Quantisierung und damit einer einheitlichen Beschreibung aller Naturkräfte. Die Allgemeine Relativitätstheorie führt zusammen mit den Prinzipen der höchst erfolgreichen Quantenphysik auf eine kleineste Länge – der Planklänge – unterhalb derer beide fundamentale Theorien nicht mehr vereinbar sind. Der fundamentale Grund für all diese Probleme besteht in der Nichtabschirmbarkeit der Gravitation. Es bestand daher die Aufgabe, nach neuen physikalischen Prinzipien zu suchen, welche die Gravitation beschränken konnten. Versuche gab es viele, die jedoch an empirischen Evidenzkriterien oder an mathematischen Schwierigkeiten scheiterten. Insgesamt erscheint es historisch betrachtet schwierig zu sein, überhaupt neue Prinzipien zu benennen. Die singularitätsfreie allgemein-relativistische Gravitationstheorie knüpft daher zunächst nicht an neue fundamentale Prinzipien an, welche sie zu formulieren versuchte, sondern sie wurde zunächst als mathematisches Experiment konzipiert. Die Schwarzschild-Metrik sollte geringfügig so korrigieren werden, dass ein Schwarzschild-Radius und die zentrale Singularität in der korrigierten Metrik nicht existieren. Das Abenteuer dieses mathematischen Experimentes bestand schließlich darin, aus der so „reparierten“ Schwarzschild-Metrik die Einstein’sche Effekte herzuleiten und deren Abweichungen von den Vorhersagen der Allgemeinen Relativitätstheorie, bzw. den Beobachtungen zu untersuchen. Zugleich sollten keine neuen Naturkonstanten und kein freier Anpassungsparameter eingeführt werden. Darum wurde bei der Konzeption der neuen Metrik allein ein geeigneter funktionaler und plausibel begründbarer Zusammenhang gesucht, der sich schließlich als wegweisend für eine komplette neue und erstmals vollständig singularitätsfrei allgemein-relativistische Gravitationstheorie erwies.

Die große Überraschung bestand darin, dass sich aus der neuen Metrik nicht nur die Einstein’schen Effekte des zentralsymmetrischen Gravitationsfeldes zwanglos für das Planetensystem herleiten ließen. Abweichungen von der Allgemeinen Relativitätstheorie zeigten sich erste in galaktischen Größenordnungen und in extremen Gravitationsfeldern. Aber diese Abweichungen bewirkten eine höhere empirische Evidenz der Theorie im Vergleich zur der ART, weil sie den „Dunkle-Materie-Effekt“ zu erklärten vermochten. Die Abweichungen in extremen Gravitationsfeldern führten zur gewünschten mathematischen Selbstkonsistenz der Gravitation, d.h. es existiert kein Ort im Universum, in welchem a-physikalische Zustände möglich sind. Zugleich zeigte die Analyse der Eigenschaften der neuen Metrik, dass aus ihr neue fundamentale Prinzipien von physikalischer und kosmologischer Tragweite deduziert werden konnten, welche in ihrer grundsätzlichen Stoßrichtung und Intention mit Ideen von Halley (1720), Mach (1883), Neumann (1896), Seeliger(1896, 1909), Föppl (1900, 1901) und Einstein (1905, 1915) in engster Beziehung stehen.

Dass die Entwicklung der Theorie nicht mit der Fundierung einer Feldgleichung begann, ist der fehlenden Kenntnis solcher fundamentaler

Prinzipien geschuldet, auf die man sich berufen könnte. Doch das Vorgehen entspricht ganz der Newtonschen Vorgehensweise, der zuerst das Kraftgesetz für das zentralsymmetrische Gravitationsfeld formulierte, bevor Feldgleichung (Poisson-Gleichung), als Darstellungsform der Theorie eingeführt worden.

Auch die singularitätsfrei allgemein-relativistische Gravitationstheorie ist eine Theorie der Prinzipien. Das einzige Prinzip, welches sie an der Allgemeinen Relativitätstheorie revidiert, ist das starke Äquivalenzprinzip, welches empirisch tatsächlich nicht ausreichend gesichert ist und jetzt nur noch als Näherung angesehen werden kann. Außer, dass die singularitätsfreie allgemein-relativistische Gravitationstheorie quantisierbar ist, also Grundlage einer Quantentheorie der Gravitation sein kann, ist das Verhältnis beispielsweise zur noch unfertigen Schleifen-Quanten-Gravitation völlig unklar. Es ist nicht ausgeschlossen, dass die Schleifen-Quanten-Gravitation die singularitätsfreie allgemein-relativistische Gravitationstheorie als Grenzfall für $\hbar \to 0$ liefern könnte. Aber es könnte auch sein, dass die Schleifen-Quanten-Gravitation überhaupt nur dann funktionieren kann, wenn sie an Stelle der ART, die singularitätsfreie allgemein-relativistische Gravitationstheorie als Grenzfall enthält. Möglicherweise beruhen gerade die Schwierigkeiten der Entwicklung der Schleifen-Quanten-Gravitation auf dem Problem, sich zu sehr an die ART zu binden. Jedenfalls leben wir in spannenden physikalischen Zeiten und was die Prinzipienfrage betrifft, so hat die Analyse der mathematischen Korrektur der Schwarzschild-Metrik ein lupenreines Prinzip der singularitätsfreien allgemein-relativistischen Gravitationstheorie offenbart, nämlich das Prinzip der Selbstabschirmung der Gravitation, was ein makroskopischer Quantengravitationseffekt sein kann.

**Das Newtonsche Gravitationsparadoxon**

Die Newtonsche Gravitationstheorie beginnt historisch mit dem Kraftgesetz:

$$\vec{K}_{12} = -f\,\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} = m_1\vec{G}_{12} = \\ = -m_2\vec{G}_{21} = -\vec{K}_{21} \qquad (1)$$

und die zugehörige Feldgleichung ist durch die Poisson-Gleichung gegeben:

$$\Delta U = 4\pi f \rho \qquad (2).$$

Der Betrag der Feldstärke der Gravitation nimmt gemäß (1) mit dem Quadrat der Entfernung ab:

$$\left|\vec{G}_{12}\right| = \frac{m_1}{r_{12}^2} \qquad (3),$$

während sich das Gravitationspotential nach dem Gesetz:

$$U = -f\,\frac{m}{r} \qquad (4)$$

mit zunehmender Entfernung reduziert. Doch gleichgültig, ob wir (3) oder (4) betrachten, führt die Annahme einer im Mittel homogenen Massenverteilung auf Divergenzen für beide Größen. Denn die Anzahl der Objekte mit einer durchschnittlichen Masse innerhalb eines jeweils ins Auge gefassten Radius wächst in der 3. Potenz des Abstandes. Die Abnahme der gravitativen Größen wird überkompensiert durch die Zunahme der Masse innerhalb eines wachsenden Kugelvolumens. In einem unendlichen Kosmos wachsen daher die gravitativen Größen über alle Schranken, wenn sie sich, wie in der Newtonschen Gravitationstheorie vorausgesetzt, linear addieren[1]. Dieses Problem war bereits Newton bekannt. Historisch gab es verschiedene Versuche, dieses Problem zu lösen. Ein Versuch wurde schon in der Fußnote genannt. Mathematisch vermuteten bereits Neumann und Seeliger im 19. Jahrhundert, dass das Gravitationsgesetz selbst modifiziert werden müsste. Neumann schlug eine Abschwächung des Newtonschen Gravitationspotentials entsprechend der Gleichung:

$$U = -f\,\frac{m}{r}\,e^{-k\cdot r} \qquad (5)$$

vor, während Seeliger das Kraftgesetz modifizieren wollte:

$$\vec{K}_{12} = -f\,\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\,\vec{r}_{12}\cdot e^{-k\cdot r_{12}} \qquad (6).$$

**Die Allgemeine Relativitätstheorie und die scheinbare Auflösung des Gravitationsparadoxons**

Die große Revolution in der Gravitationsforschung wurde jedoch nicht von Neumann oder Seeliger losgetreten. Der großen Revolution gingen zunächst wichtige andere Entdeckungen voraus. Im Jahre 1905 veröffentlichte ein Patentbeamter (Technischer Experte 3. Klasse) drei revolutionäre physikalische Schriften, die eine davon über die Spezielle Relativitätstheorie, welche ganz neue Vorstellungen über Raum und Zeit begründete. Diese Theorie war die Voraussetzung für die 1915 ebenfalls von Albert Einstein begründete Allgemeine Relativitätstheorie. Diese Theorie verallgemeinert das Raum-Zeit-Konzept der Speziellen Relativitätstheorie von einer Minkowski-Raum-Zeit hin zu einer Riemannschen Raum-Zeit. Die Gravitation war nun als raum-zeitliches Phänomen einer Krümmung der vierdimensionalen Raum-Zeit-Struktur zu verstehen und diese Krümmung wurde durch die Materieverteilung sowie die Grenz- und Anfangsbedingungen des jeweiligen Problems bestimmt. Da die Newtonsche Gravitationstheorie die einzige bewährte Gravitationstheorie ihrer Zeit war, bemühte sich Einstein, eine bestmögliche Nähe zur Newtonschen Gravitationstheorie zu sichern. Unter anderem war dafür das so genannte starke Äquivalenzprinzip grundlegend, welches die strenge Proportionalität von passiver und aktiver Gravitationsmasse propagierte. Im Resultat konnte Einstein tensorielle Feldgleichungen angeben, welche eine allgemeine Beschreibung der Gravitation als metrisches Feld zum Inhalt hatten. Für das zentralsymmetrische Gravitationsfeld führten Einsteins Feldgleichungen auf die berühmte Schwarzschild-Metrik[2]:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{dr^2}{1-\frac{2M}{r}} + \\ &+ r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)d\varphi^2\right) - \\ &- \left(1-\frac{2M}{r}\right)c^2 dt^2 \end{aligned} \qquad (7).$$

[1] Ein Ausweg aus diesem Dilemma wäre Lamberts Konzeption eines hierarchischen Universums unter Beibehaltung der Newtonschen Gravitation. Doch während riesige Leerräume zwischen den Galaxien die Homogenität der Materieverteilung im Sinne Lamberts etwas in Zweifel ziehen, scheint die Homogenität der 2.7 K – Strahlung das Konzept einer im Mittel homogenen Materieverteilung im Universum zu stützen.

[2] Die Beziehung zur schweren Masse als Ursache der Gravitation ist durch die Beziehung $M\cdot c^2 = f\cdot m$ gegeben.

# Vom Newtonschen Gravitationsparadoxon zur singularitätsfreien allgemein-relativistischen Gravitationstheorie

Klaus Retzlaff

Auf der Grundlage dieser Metrik konnte eine bis dahin unverstandene astronomische Beobachtung, nämlich ein durch die planetaren Störungen nicht erklärbarer Teil der Periheldrehung von ca. 43‘‘ pro Jahrhundert des Planeten Merkur berechnet werden:

$$\delta \approx \frac{6\pi M}{a\left(1-e^2\right)} \qquad (8).$$

Hinzu trat der erfolgreiche Nachweis einer Vorhersage für die Lichtablenkung von Sternenlicht durch die Sonne:

$$\delta \approx \frac{4M}{r} \qquad (9),$$

wobei $r$ der minimale Abstand von der Sonne ist. Und schließlich prognostizierte die Theorie eine Rotverschiebung elektromagnetischer Strahlung durch die Gravitation und damit eine Änderung der Wellenlänge in Abhängigkeit von der Höhe $h$ und der Fallbeschleunigung $g$ :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = g \cdot h \qquad (10).$$

Die empirische Bestätigung all dieser Effekte führte Einstein zu neuem Weltruhm und zur allgemeinen Anerkennung der Allgemeinen Relativitätstheorie. Später traten kosmologische Prognosen hinzu (und aktuell der Nachweis von Gravitationswellen), was dazu führte, dass die Einstein’sche Allgemeine Relativitätstheorie bis heute, als unangefochtene Theorie der Gravitation gilt. Alle Versuche, diese Theorie zu ersetzen, sind bisher aus sehr unterschiedlichen Gründen gescheitert.
Dabei hat diese Theorie ernsthafte Mängel. Im Grunde ist sie nicht konsistent. Schon die Betrachtung der Gleichung (7) zeigt, dass an der Stelle $r = 2M$ etwas Sonderbares auftritt. Im ersten Term der Gleichung findet eine Division durch Null statt, während der Koeffizient im Zeit-Zeit-Term Null wird. Nun, das Ganze wäre nicht besonders schlimm, denn das bedeutet aus Sicht des weit entfernten ruhenden Beobachters nur, dass er unendlich lange warten muss, bis ein Objekt, welches sich direkt in Richtung Zentrum bewegt, an den Abstand $r = 2M$ gelangt. Aber problematisch wird die Sache auch für den Kosmonauten, der sich im freien Fall befindet. Für ihn bedeutet das Überschreiten des Schwarzschild-Radius ( $r = 2M$ ) die Einlassung auf eine Reise ohne Rückfahrkarte. Er stürzt in Sekundenschnelle in diesen Bereich hinein, wird dabei schon vor dem Passieren dieser Marke zerrissen (was nicht wichtig für uns ist), aber er kann auch nicht mehr zurück. Er stürzt unaufhaltsam ins Zentrum und landet in einer Singularität, in der kein physikalisches Gesetz mehr gilt.
Wir gehen hier nicht auf die kosmische Singularität ein, aus der alles entstanden sein soll, aber in Bezug auf die Kosmologie haben wir ein ähnliches unphysikalisches Phänomen, die Entstehung von Allem aus dem reinen Nichts. Nicht einmal Raum und Zeit waren demnach vorhanden, dann soll es einen großen Knall gegeben haben – einen Urknall[3], mit dem sich glatt auch die Religion anfreunden konnte[4].
Die Schwarzen Löcher (Singularitäten des Zentralfeldes) wurden akzeptiert, weil z.B. Sternenbewegungen um das Zentrum der Milchstraße nur den Schluss auf gigantische Schwarze Löcher zulassen. Ja, aber nur, wenn die Allgemeine Relativitätstheorie als absolut

---

[3] Der Urknall beweist die Existenz einer Akausalität in der Allgemeinen Relativitätstheorie.

[4] Stephan Hawkin berichtete 2013 in einem Vortrag am California Institute of Technology in Pasadena, den er vor mehr als 1.100 Zuhörern gehalten hatte, dass noch vor nicht allzu langer Zeit die Kirche versucht habe, Wissenschaftler von diesem Thema abzubringen. Papst Johannes Paul II habe sie ermahnt, der Frage nach dem Moment der Schöpfung nicht nachzugehen, da der heilig sei. Just zu der Zeit habe er selbst (Stephan Hawkin) einen Aufsatz zu dem Thema veröffentlicht, erzählte er. *"Ich war froh, dass ich nicht gleich einer Inquisition unterzogen wurde."*

gültige Theorie vorausgesetzt wird. Ist sie das? Warum sollte es nicht superdichte Materiezustände geben, ohne dass ein Singularitätsproblem auftritt?
Die kosmologische Singularität wurde auf Grund des Nachweises der zunehmenden radialsymmetrischen Rotverschiebung des Lichtes von Galaxien bei zunehmender Entfernung akzeptiert, denn wenn die daraus hergeleitete Galaxienflucht auf der Grundlage der Allgemeinen Relativitätstheorie zurückrechnet wird, endet alles in einem, in endlicher Zeit zurückliegenden singulären Anfang von Raum und Zeit. Ist aber durch die Beobachtung der Galaxienflucht eine Anfangssingularität bewiesen, oder nur ein in der Vergangenheit gelegener superdichter Zustand des Universums evident? Die gleiche Frage lässt sich in Bezug auf die Schlussfolgerungen aus der Beobachtung der kosmischen Hintergrundstrahlung stellen. Superdicht ist nicht singulär! Ein Versagen aller Gleichungen muss man als Physiker wirklich nicht hinnehmen. Einstein hielt seine Gleichungen nicht für das letzte Wort. Warum sollten wir das tun?
Schließlich gibt es neben der fundamentalen mathematischen Inkonsistenz, die sich in den Singularitäten bemerkbar macht, auch unerklärte Phänomene, wie die scheinbar beschleunigte Expansion des Universums und die scheinbar fehlende Masse in übergalaktischen Dimensionen.
Wir wissen derzeit noch nicht, ob die singularitätsfreie allgemein-relativistische Gravitationstheorie das Problem der beschleunigten Expansion des Universums zu erklären vermag, was wir aber wissen ist, dass die Reparatur der Schwarzschild-Metrik im Sinne einer Modifikation, die nicht mehr der ART genügt, das Phänomen der scheinbar fehlenden Masse zu erklären vermag, und dabei alle Erfolge der ART im Gravitationsfeld der Sonne für sich selbst in Anspruch nehmen kann. Und weil die Modifikation erst in extremen Feldern lokal wirksam wird – über große Distanzen macht sie sich als Dunkle-Materie-Effekt bemerkbar, vermag die singularitätsfreie allgemein-relativistische Gravitationstheorie alle gravitativen Phänomene so zu beschreiben, wie es die Allgemeine Relativitätstheorie vermag, nein, eigentlich kann sie es besser - siehe die Auflösung des Dunkle-Materie-Rätsels!

**Die singularitätsfreie Modifikation der Schwarzschild-Metrik und das Prinzip der Selbstabschirmung der Schwerkraft**

Die singularitätsfreie Modifikation der Schwarzschild-Metrik ist der Beginn eines mathematischen Experimentes. Auf der Grundlage, dass die sich aus der Einstein'schen Allgemeinen Relativitätstheorie herleitende Schwarzschild-Metrik eine genaue Beschreibung der Bewegungen einschließlich des Lichtes in einem Zentralsymmetrischen äußeren Gravitationsfeld darstellt, muss jede Revision der Allgemeinen Relativitätstheorie doch die Leistungen dieser Theorie in sich aufnehmen, ähnlich, wie die Allgemeine Relativitätstheorie die Newtonsche Mechanik und die Spezielle Relativitätstheorie in sich als Grenzfall aufgenommen hatte, weil in diesen Theorien eine Wahrheit über die Natur steckt. Zugleich ist aber eine Revision einer erfolgreichen Theorie überhaupt nur zu rechtfertigen, wenn dies der Analyse der Wirkmechanismen fundamentaler Prinzipien dient, oder wenn dadurch innere Widersprüche gelöst, bzw. Beobachtungen besser erklärt werden können. Sinnvoll sind auch Revisionen, welche es ermöglichen, eine Theorie mit anderen Theorien zu verschmelzen, sofern die Resultate wenigstens nicht in Widerspruch zur Empirie geraten, und die Vereinheitlichung nicht nur eine formale, sondern eine reale Vereinheitlichung der physikalischen Grundgesetze beinhaltet.

In Bezug auf die singularitätsfreie allgemein-relativistische Schwarzschild-Metrik war die Frage von Bedeutung, ob eine mathematische Struktur konstruierbar ist, die das Auftreten des Singularitätsproblems vermeidet, also Schwarze Löcher verhindert, und die zugleich mit den Beobachtungen in Einklang steht.

# Vom Newtonschen Gravitationsparadoxon zur singularitätsfreien allgemein-relativistischen Gravitationstheorie

Klaus Retzlaff

Das Prinzip, welches für das Auftreten eines Gravitationskollapses verantwortlich zeichnet, ist gerade das Prinzip, welches nicht ausreichend physikalisch abgesichert ist, es ist das so genannte starke Äquivalenzprinzip, welches die strenge Proportionalität von passiver und aktiver schwerer Masse zum Inhalt hat. Dieses Prinzip bewirkt, dass die Gravitation über alle Grenzen ansteigen und daher alle anderen Kräfte dominieren kann.

Die Brechung dieses Prinzips erschien durch die Einführung einer Selbstabschirmung der Schwerkraft mathematisch modellierbar. Abschirmungen oder Schwächungen sind häufig durch Exponentialfunktionen beschreibbar. Es ist intuitiv leicht verstehbar, dass eine Größe, welche sich selbst beeinflusst durch eine Exponentialfunktion beschreibbar sein kann, wenn die Selbstbeeinflussung linear ist. Ist beispielsweise die Änderung einer Größe $dy$ bei Änderung einer Größe $dx$ gemäß:

$$dy = -y(x)dx \qquad (10)$$

der Größe $y(x)$ proportional, dann führt (10) auf die homogene Differentialgleichung erster Ordnung:

$$\frac{dy}{dx} + y(x) = 0 \qquad (11),$$

deren Lösung die Exponentialfunktion:

$$y(x) = e^{-x} + C \qquad (12)$$

ist. Außerdem deckt der Definitionsbereich einer Exponentialfunktion den gesamten Bereich der reellen Zahlen ab. Die Exponentialfunktion ist singularitätsfrei. Könnte eine solche Selbstschwächung eine Rolle für die Gravitation spielen, die ja immerhin gemäß Newton nach einem $\frac{1}{r^2}$-Gesetz abfällt, wenn man an die Kraft denkt? Dankt man an das Newtonsche Gravitationspotential, dann fällt dessen Betrag $\propto \frac{1}{r}$ ab. Bilden wir die Differenz zwischen einer Exponentialfunktion und einem Bruchterm:

$$\Delta = e^{-x} - \frac{1}{x} \qquad (13),$$

so läuft diese Differenz $\Delta$ sehr schnell gegen Null! Gleiches gilt auch, wenn $\frac{1}{x^2}$ statt des Bruchterms $\frac{1}{x}$ verwendet wird. Daher war es intuitiv naheliegend, den Bruchterm in der Schwarzschild-Metrik der ART in geeigneter Weise durch einen Exponentialfunktionsterm zu ersetzen. Aber wie musste das genau gemacht werden? Betrachtet man die Reihenentwicklung der e-Funktion:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \ldots \qquad (14)$$

und vergleicht die Terme mit der Radius-Radius-Komponente, bzw. mit der Zeit-Zeit-Komponente des metrischen Tensors:

$$g_{rr} = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}, \quad g_{tt} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \qquad (15),$$

so erkennt man einen Zusammenhang, wenn die Größe $x$ in der Beziehung (10) durch:

$$x = \frac{2M}{r} \qquad (16)$$

substituiert wird. An die Stelle der Schwarzschild-Metrik tritt dann die singularitätsfreie allgemein-relativistische Metrik:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{e^{-\frac{2M}{r}}} + r^2\left(\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2\right) - e^{-\frac{2M}{r}}c^2dt^2 \qquad (17).$$

Das mathematische Experiment bestand also zunächst in der Einführung dieser Metrik, und in der rechnerischen Überprüfung, ob diese Metrik empirische Evidenz im Sonnensystemsystem besitzt, ob sie es vermochte, die Einstein'schen Effekte zu modulieren. Dass sie das tun sollte, lag zumindest aus dem Grund nahe, weil sie die

Schwarzschild-Metrik in erster Näherung enthielt, was zu sehen ist, wenn man sich an die Reihenentwicklung (14) erinnert. Während sich aus der Schwarzschild-Metrik die Bahngleichung:

$$\Delta\varphi = \int_{r_{Perihel}}^{r_{Aphel}} \frac{\frac{2B}{r^2}dr}{\sqrt{A^2 - c^2 + \frac{2Mc^2}{r} - \frac{B^2}{r^2} + \frac{2MB^2}{r^3}}} \qquad (18)$$

herleiten lässt, folgt aus der singularitätsfreien allgemein-relativistischen Metrik[5] die Gleichung:

$$\Delta\varphi = \int_{r_{Perihel}}^{r_{Aphel}} \frac{\frac{2B}{r^2}dr}{\sqrt{A^2 - \left(c^2 + \frac{B^2}{r^2}\right)e^{-\frac{2M}{r}}}} \qquad (19).$$

Entwickelt man die Diskriminante als Potenzreihe bis zur dritten Potenz $\approx \frac{1}{r^3}$, dann erhält man als Näherung für (19):

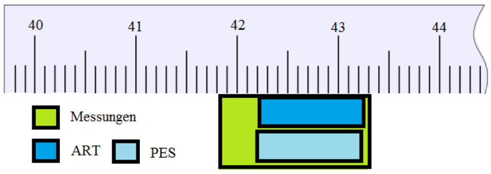
$$\Delta\varphi = \int_{r_{Perihel}}^{r_{Aphel}} \frac{\frac{2B}{r^2}dr}{\sqrt{A^2 - c^2 + \frac{2Mc^2}{r} - \frac{B^2 - 2Mc^2}{r^2} + \frac{2MB^2}{r^3}}} \qquad (20)$$

Die singularitätsfreie allgemein-relativistische Metrik modifiziert in (20) lediglich den Faktor des Terms $\approx \frac{1}{r^2}$, während die Periheldrehung erst durch Terme höherer Ordnung hervorgerufen wird, konkret ist der Term in der Ordnung $\approx \frac{1}{r^3}$ überhaupt nicht betroffen, und das bewirkt eine Periheldrehung, wie sie aus der Einstein'schen Gravitationstheorie vorhergesagt wird (Abbildung 1). Die leichte linksseitige Abweichung der Periheldrehung, die sich aus der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik errechnet, von den Werten der Allgemeinen Relativitätstheorie ist ein numerisches Artefakt. Reale Unterschiede treten erst ab der 4. Ordnung gemäß des Terms:

$$\approx -\frac{2B^2M^2}{r^4} \qquad (21)$$

und auf Grund von Termen höherer Ordnung in Erscheinung. Doch bereits der Term 4. Ordnung ist zu klein, um überhaupt gemessen werden zu können.

**Abbildung 1:** Dargestellt ist die relativistisch bedingte Periheldrehung des Planeten Merkur. Die Spannweite der Messungen ergibt sich aus der Bandbreite der Messergebnisse[6]. Die Breite der ART-, bzw. PES-Ergebnisse ergibt sich aus der ungenauen Kenntnis der Newtonschen Gravitationskonstante[7].




Grundlage zur Berechnung der Periheldrehung bildeten die Formeln:

$$\delta = \Delta\varphi - 2\pi \qquad (22),$$

mit

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{2M}} \frac{4}{\sqrt{u_i - u_A}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{8}\pi \cdot k^2 + \frac{9}{128}\pi \cdot k^4\right) \qquad (23).$$

Diese Formel ist in höherer Ordnung als die Einstein'sche Formel (8) aus dem Jahre 1915. In (23) ist $u_A$ der Kehrwert des Aphels, $u_i$ ist der Kehrwert eines anderen Aphels[8], welches sich in der Allgemeinen Relativitätstheorie in unmittelbarer Nähe aber gerade noch außerhalb vom Schwarzschildradius befindet. Für die Allgemeine Relativitätstheorie gilt:

$$u_i = 1 - u_P - u_A \qquad (24),$$

$u_P$ ist dabei der Kehrwert des Perihels. In der singularitätsfreien Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik ist dagegen:

$$u_i = \frac{1}{2M} + \frac{c^2}{B^3} - u_P - u_A \qquad (25)$$

zu verwenden. Mit den jeweils korrekt zugeordneten Größen $u_i$ ist der Parameter $k^2$ in der Gleichung (23) durch die Formel:

[5] Auf Grund ihrer Leistungsfähigkeit habe ich diese auch als Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik (PES) bezeichnet.

[6] siehe Tabelle 1 im Anhang

[7] siehe Tabelle 2 im Anhang

[8] Für $A^2 = 0$ wäre $r_i$ der Schwarzschild-Radius.

$$k^2 = \frac{u_P - u_A}{u_i - u_A} \qquad (26)$$

zu berechnen. Die Formel (25) besagt, dass der Radius $r_i$ nun dicht an das Zentrum $r = 0$ herangerückt ist. In gewisser Weise übernimmt das Zentrum die Rolle des Schwarzschildradius. Insofern verweist Gleichung (25) darauf, dass die wesentlichen Unterschiede der Theorien nicht das Planetensystem betreffen, sondern, dass sich die Unterschiede in den extremen Bereichen der Gravitation manifestieren.

Wir haben hier nur die Periheldrehung exemplarisch angegeben, um die Leistung der singularitätsfreien allgemein-relativistischen Gravitationstheorie zu demonstrieren. Die Rechnungen zu den anderen relativistischen Effekten sind Gegenstand einer in Vorbereitung befindlichen Publikation.

**Die Selbstabschirmung der Schwerkraft in der singularitätsfreien allgemein-relativistischen Gravitationstheorie**

Die Interpretation einer gravitativen Selbstabschirmung kann durch die Betrachtung des quasiklassischen Grenzfalls demonstriert werden. Der Zusammenhang zwischen Newtonschem Gravitationspotential und Schwarzschild-Metrik kann unter Berücksichtigung der Fußnote 2 direkt aus der Schwarzschildmetrik abgelesen werden:

$$g_{tt} = -\left(1 + \frac{2U(r)}{c^2}\right) \qquad (27).$$

Aus (26) ergibt sich:

$$U(r) = -\frac{c^2}{2}\left(1 + g_{tt}\right) \qquad (28)$$

durch einfaches Umstellen der Gleichung. Wendet man diese Schlussweise auf die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik der singularitätsfreien allgemein-relativistischen Gravitationsgleichung an, dann findet man das Potential:

$$U(r) = -\frac{c^2}{2}\left(1 - e^{-\frac{2M}{r}}\right) \qquad (29).$$

Aus dem Potential (28) lässt sich durch Gradientenbildung die Feldstärke bestimmen:

$$\vec{G} = -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} = -f\,\frac{m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}e^{-f\frac{2m}{c^2 r}} \qquad (30),$$

wobei wir die klassischen Größen benutzt haben, um die Beziehung zu (1) deutlich zu machen. Unter Verwendung von (4) führt (30) aber auf:

$$\vec{G} = -\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\vec{r}}{r} = -f\,\frac{m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}e^{\frac{2\cdot U(r)}{c^2}} \qquad (31),$$

mit dem Newtonschen Gravitationspotential $U(r)$, welches wegen seiner Negativität im Exponenten der e-Funktion eine Suppression der Feldstärke bewirkt. Erst für $c^2 \to \infty$ erhält man das vollständig klassische Potential zur Poisson-Gleichung (2). Darum ist vor der Grenzwertbildung $c^2 \to \infty$ die Rede vom *quasi-klassischen* Grenzfall gewesen.

**Die Selbstabschirmung der Schwerkraft und der Dunkle-Materie-Effekt**

Bereits die Bewegung der Pioneer-Sonde scheint auf eine unerklärte zusätzliche Kraft in Richtung der Sonne hinzuweisen, die weder durch die Newtonsche Gravitation, noch durch die Allgemeine Relativitätstheorie erklärt werden kann. Darüber hinaus weisen die Bewegungen von Sternen weit[9] außerhalb der galaktischen Scheibe eine zu schnelle Rotation um das Zentrum der Milchstraße auf, und Galaxienhaufen müssten eigentlich auf Grund der kinetischen Energie ihrer Haufenmitglieder längst zerfallen sein. Irgendwie scheint die Gravitation in verschiedenen Zusammenhängen stärker als erwartet zu sein. Doch das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit ist eine sehr große Zahl und betrachtet man den Ausdruck (31)

[9] Computersimulationen des Autors konnten zeigen, dass die Bewegungen der Sterne der Milchstraße bis auf eine Distanz von 15kpc, das entspricht dem optischen Radius der Galaxie, vollständig auf der Basis der Newtonschen Gravitationstheorie und allein unter Berücksichtigung der sichtbaren normalen Materie erklärbar ist.

genauer, so sieht man, dass diese große Zahl die Selbstabschirmung der Gravitation erst über sehr große Distanzen spürbar macht. Tatsächlich kann man die Form (31) auch so auffassen:

$$\vec{G} = -f^{*} \frac{m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \qquad (32),$$

mit der effektiven Gravitationskonstante:

$$f^{*} = f \cdot e^{\frac{2 \cdot U(\vec{r})}{c^2}} \qquad (33).$$

Gemäß (33) stellt sich die effektive Gravitationskonstante selbst als vom Gravitationspotential abhängig dar. Das hat, wie man an dieser quasi klassischen Näherung erkennen kann, fundamentale Folgen für die Beurteilung der Gravitation an verschiedenen Orten. Würde also eine Zivilisation weit innerhalb einer Galaxie ohne Kenntnis der Beziehung (33) experimentell eine Gravitationskonstante bestimmen, sagen wir, weil sie gerade das Newtonsche Gravitationsgesetz entdeckt hat, oder weil es ihr gelungen ist, die Allgemeine Relativitätstheorie aufzustellen, müsste sie zu der Auffassung gelangen, dass die Gravitation im Außenraum ihrer Galaxie viel zu hoch sei, als dass sie durch die beobachtbare Materie erklärt werden könnte. Tatsächlich wäre aber auf Grund von (33) die Gravitationskonstante durch verschiedene Einflussfaktoren determiniert, nämlich:

- durch die tatsächlich universelle Gravitationskonstante $f$,
- das Gravitationspotential des Kosmos,
- das Gravitationspotential der Galaxis,
- das Gravitationspotential des eigenen Sterns
- und das Gravitationspotential des eigenen Planeten

festgelegt. Das Gravitationspotential wäre real durch:

$$U(\vec{r}) = U_{Kosmos} + U_{Galxis} + \\ + U_{Stern} + U_{Planet} \qquad (34)$$

bestimmt. Dass dieses Gesamtpotential die Größe der von ihnen gemessenen Gravitationskonstante bestimmen könnte, das wissen sie aber nicht. Die Aliens würden die von ihnen gemessene effektive Gravitationskonstante für eine universelle Konstante halten, so wie wir unsere Newtonsche Gravitationskonstante bisher immer für universell gehalten haben. Da sich nun bezogen auf die Galaxie, in zunehmendem Abstand vom Stern und vom galaktischen Zentrum der Betrag des Gesamtpotentials absenkt, spüren Sterne weit außerhalb der Galaxie eine vergleichsweise stärkere Gravitation, weil sich die effektive Gravitationskonstante am Ort des betreffenden weit entfernten Sterns vergrößert. Die Wirkung davon ist völlig identisch mit dem Fall, dass die Galaxie eine scheinbar größere Gravitationsmasse hätte. Das Wort „Gravitationsmasse“ habe ich bewusst gewählt, um an den Bruch des starken Äquivalenzprinzips zu erinnern. Während unsere Aliens daher eine Dunkle Materie in ihrer Galaxie vermuten, würden Zivilisationen weit außerhalb der Galaxie schnell die Täuschung bemerken, weil sie bei sich eine starke Gravitationskonstante messen, diese ist aber viel zu groß, um die scheinbare Langsamkeit der Bewegungen von Sternen im Innern der Galaxie zu erklären. Sie sehen Sternenmaterie, die scheinbar aus ihrer Sicht zu wenig Gravitation erzeugt. Und nur, weil wir es erwähnt haben, nimmt aus Sicht der Pioneer-Sonde die Gravitationskonstante mit zunehmender Entfernung von der Sonne etwas zu – ein Effekt, der einer zusätzlichen Gravitationskraft äquivalent ist. Zur experimentellen Prüfung sollte man daher ideale Körper als Satelliten aussenden, die in unterschiedlichen Richtungen (orientiert an der Galaxie) das Sonnensystem verlassen, um eventuelle technische Effekte auszuschließen, und um gezielt die Richtungsabhängigkeit und Stärke der Bremsung, welche die Raumsonden erfahren, untersuchen zu können.

Die Ergebnisse einer derartigen Mission zur Überprüfung der Gravitationstheorien wären von fundamentaler Bedeutung für die Kosmoswissenschaften, könnten sie doch den Nachweis erbringen, dass es keinen Urknall im strengen Sinne des Wortes gegeben hat.

# Vom Newtonschen Gravitationsparadoxon zur singularitätsfreien allgemein-relativistischen Gravitationstheorie

Klaus Retzlaff

**Wie groß ist die maximale Gravitation?**
Wenn es so ist, dass es einen Gravitationskollaps, in dessen Ergebnis eine Singularität der Raum-Zeit entsteht, nicht geben kann, dann ist es naheliegend, eine maximale mögliche Größe der Gravitation anzunehmen. Und in der Tat kann eine solche Größe exakt ausgerechnet werden. Gehen wir von dem der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik zugeordneten effektiven Gravitationspotential:

$$U_{effektiv} = -c^2 + \left(c^2 + \frac{B^2}{r^2}\right) e^{-\frac{2M}{r}} \qquad (35)$$

aus und bilden den Grenzwert:

$$\lim_{r \to 0} U_{effektiv} = -c^2 \qquad (36),$$

dann erkennen wir, dass der Betrag des effektiven Gravitationspotentials niemals das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit überschreiten kann. Offensichtlich gibt es hier eine ähnliche Grenze für die Gravitation, wie wir sie aus der speziellen Relativitätstheorie für die Geschwindigkeit eines mit Ruhemasse behafteten Teilchens kennen.

**Anhang**

**Tabelle 1:** Messungen der relativistischen Periheldrehung:

| **Jahr** | **Autoren** | **Methode** | **Ergebnis** |
|---|---|---|---|
| 1975 | Morrison, Ward, 1975 | Merkurdurchgänge | 41,90″ ± 0,50″ |
| 1976 | Shapiro, 1976 | Radar | 43,10″ ± 0,21″ |
| 1987 | Anderson, 1987 | Radar | 42,92″ ± 0,20″ |
| 1991 | Anderson, 1991 | Radar | 42,94″ ± 0,20″ |
| 1992 | Anderson, 1992 | Radar | 43,13″ ± 0,14″ |

**Tabelle 2:** Messungen der Gravitationskonstante in verschiedenen Laboren

| **Labor** | **f · $10^{11}$** | **(*ppm*)** |
|---|---|---|
| New Zealand MSL | 6.6742(6) | 90 |
| Zürich | 6.6749(14) | 210 |
| Wuppertal | 6.6735(9)(13) | 240 |
| JILA | 6.6873(94) | 1400 |
| BIPM | 6.683(11) | 1650 |
| Karagioz (Russia) | 6.6729(5) | 75 |
| Luther/Towler 1982 | 6.6726(5) | 64 |
| PTB 1995 | 6.71540(56) | 83 |