Über die quantenmechanische Determination der makroskopischen Raum-Zeit-Metrik

Klaus Retzlaff

Zusammenfassung: Am Beispiel des kugelsymmetrischen Vakuumgravitationsfeldes wird gezeigt, dass für die Metrik der Raum-Zeit nicht allein das Newton'sche Gravitationsgesetz (Newton, 1686), die Spezielle Relativitätstheorie (Einstein, 1905) und die Äquivalenzprinzipien von zentraler heuristischer Bedeutung sind, wie Einstein es angenommen hatte. Eine Annahme, die ihn immerhin zur Entdeckung der Allgemeinen Relativitätstheorie führte (1915), sondern, dass Einsteins Lichtquantenhypothese (Einstein, 1905, Nobelpreis 1922), $E = h \cdot \nu$ *, eine Beziehung, die De Broglie auf alle materiellen Teilchen übertrug (Nobelpreis 1927), die makroskopische Metrik fundamental bestimmt. Es wird gezeigt, dass die Berücksichtigung der Einstein'schen Beziehung, die ihrerseits auf Plancks Quantenhypothese (Planck, 1900, Nobelpreis 1919) zurückgeht, auf eine Metrik ohne Singularitätsprobleme führt. Diese neue Metrik enthält die aus der Einstein'schen Allgemeinen Relativitätstheorie folgende Schwarzschild-Metrik (1917) als Näherung. Abweichungen von den Einstein'schen Effekten im Planetensystem liegen in der Größenordnung* 10^{-6}*. Da hier offenbar ein Zusammenhang zwischen Quantenphysik und Gravitation aufgedeckt werden konnte, gelingt es auch, die Schwarzschild-Metrik aus einer falschen quantenphysikalischen Voraussetzung herzuleiten. Damit wird verständlich, warum es bisher nicht gelingen konnte, Quantenphysik und Gravitation auf ein einheitliches physikalisches Fundament zu stellen. Die Untersuchung weist über die Spezifik der Kugelsymmetrie hinaus und es muss konstatiert werden, dass sich die Gravitation selbst reguliert und, dass es aus diesem Grund ganz allgemein keine gravitativen Singularitäten geben kann.*

***

Zeitreise …

Wir versetzen uns in die Zeit nach 1907. Viele Dinge aus der Physik, die wir heute kennen und die wir für gesichertes Wissen halten, waren noch gar nicht entwickelt. Max Planck hatte kurz zuvor (1900) zur Behandlung der Wärmestrahlung eines schwarzen Strahlers *„in einem Akt der Verzweiflung"* eine Quantelung der Strahlung in die Physik eingeführt, die sich nach seiner Vermutung aus dem Atombau erklären sollte. Albert Einstein erkannte die fundamentale Bedeutung dieser Arbeit Plancks und verwendete die Strahlungsquantelung zur Erklärung des lichtelektrischen Effektes. 1905 war Einsteins berühmtes Wunderjahr, in dem der Patentbeamte dritter Klasse durch seine theoretische Untersuchung der Brownschen Molekularbewegung den Nachweis der Existenz der Atome vollendete. Durch seine Analyse der Elektrodynamik stieß er auf das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und übertrug dieses Prinzip auf die Mechanik, was zur Entdeckung der Speziellen Relativitätstheorie führte, die ganz neue Einsichten über die Beziehung zwischen Raum, Zeit und Bewegung zum Inhalt hatte. Die Allgemeine Relativitätstheorie war noch nicht entdeckt. Erst 1907 offenbarte Hermann Minkowski die geometrische metrische Struktur der Raum-Zeit der Speziellen Relativitätstheorie und Einstein begann erst über die Beziehung zur Gravitation nachzudenken. Diese Zeit war ausgesprochen spannend und für die Entwicklung der modernen Physik des 20. Jahrhunderts von ausschlaggebender und wegweisender Bedeutung. Insbesondere, was die Entwicklung der Gravitationstheorie betrifft, hatte sich in der Zeit zwischen 1905 und 1915 eine Entwicklung ergeben, die durchaus nicht zwingend hätte so verlaufen müssen, wie sie verlaufen ist. Die Entwicklung wurde ganz entscheidend von Einstein bestimmt und es ist außerordentlich bemerkenswert, dass Einstein auf Grund seiner eigenen Entdeckung dieser Entwicklung eine ganz andere Wendung hätte geben können. Die Gravitationsforschung des 20. Jahrhunderts hätte dann eine etwas andere grundlegende Entwicklung genommen. Tatsächlich war und ist die Gravitationsforschung noch heute von der ungeklärten Beziehung zur Quantentheorie und von dem Singularitätsproblem geprägt.

Wir wollen jetzt versuchen, diesen alternativen Weg zu beschreiten und zeigen, wie es auch hätte laufen können.

Raum und Zeit als Geometrie

Das Wesen der Einstein'schen Entdeckung der Speziellen Relativitätstheorie als Geometrie wurde mathematisch von Einsteins Lehrer, Hermann Minkowski, als Darstellung der Physik in dem nach ihm benannten Raum formuliert. Hermann Minkowski erklärte auf der 80. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte am 21.9.1908 dazu folgendes:

„Die Anschauungen über Raum und Zeit, die ich Ihnen entwickeln möchte, sind auf experimentell-physikalischem Boden erwachsen. Darin liegt ihre Stärke. Ihre Tendenz ist eine radikale. Von Stunde an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken, und nur noch eine Art Union von beiden soll Selbstständigkeit bewahren."

Doch die Spezielle Relativitätstheorie war auf Inertialsysteme beschränkt. Die Galileische Entdeckung, dass in einem homogenen Gravitationsfeld alle Körper unabhängig von ihrer Masse gleich beschleunigt werden, zusammen mit den Ideen Machs über die Relativität der Beschleunigung, führte Einstein zur Einsicht über das Äquivalenzprinzip von Trägheit und Schwere, dass sich nämlich frei unter dem Einfluss der Gravitation bewegende Körper wie Körper in einem Inertialsystem verhalten und, dass umgekehrt, die bei einer Beschleunigung auftretenden Trägheitskräfte in einer Weise wirken, als befänden sich die Körper in einem Gravitationsfeld. Dieses Prinzip war mit einer euklidischen geometrischen Struktur der Raum-Zeit, wie sie durch den Minkowski-Raum gegeben war, nicht vereinbar. Dass eine Verallgemeinerung der geometrischen Form erforderlich war, lag auf der Hand und die Riemannsche Geometrie als Verallgemeinerung der Geometrie gekrümmter Flächen (Gauß), war bereits entwickelt, lediglich die besondere Minkowski-Signatur war zu implementieren. Die Darstellung der Bewegung im Gravitationsfeld als eine Bewegung von Objekten in einer vierdimensionalen Raum-Zeit-Welt war daher einfach zu erreichen, nämlich durch das Postulat, dass sich solche Bewegungen durch die dynamischen Gleichungen realisieren lassen:

$$\frac{d^2x^n}{d\lambda^2} + \Gamma^n_{ik}\frac{dx^i}{d\lambda}\frac{dx^k}{d\lambda} = 0 \qquad (1),$$

wobei λ ein affiner Parameter ist, es gilt die Einstein'sche Summenkonvention und die Indizes laufen von 1 bis 4. Im Riemannschen Raum sind die Christoffel-Symbole:

$$\Gamma^n_{ik} = \frac{1}{2} g^{nl}\left(g_{il},_k + g_{kl},_i - g_{ik},_l\right) \qquad (2)$$

allein durch die Komponenten des Metrischen Tensors g_{ik} und dessen Derivierte bestimmt. In diesem Bild repräsentiert der metrische Tensor die Raum-Zeit und er ist mit dem Gravitationsfeld identisch. Der Übergang in das Bezugssystem von Einsteins berühmtem frei fallendem Kasten gestattet es, die Christoffel-Symbole weg zu transformieren. Und die Physik in einem frei fallenden Kasten ist von der Physik in einem Inertialsystem nicht zu unterscheiden. Das schwache Äquivalenzprinzip liefert den Schlüssel, wie die materiellen Felder an das Gravitationsfeld koppeln. Dieses Prinzip gehört heute zu den am besten experimentell abgesicherten Prinzipien und alle Gravitationstheorien, welche Bestand haben wollen, müssen diesem Prinzip gehorchen.

Aber (1) zusammen mit (2) enthalten noch überhaupt gar keine Aussagen darüber, wie der metrische Tensor sich aus der Massenverteilung ergibt. Und die Beantwortung dieser Frage führt keineswegs eindeutig auf die Allgemeine Relativitätstheorie und die Einstein'schen Feldgleichungen. Im Übrigen sind auch Gravitationstheorien möglich, in denen die Christoffel-Symbole nicht allein durch den metrischen Tensor bestimmt sind. Doch darauf wollen wir jetzt nicht eingehen. Wir wollen Überlegungen nachgehen, welche zwischen 1905 und 1915 bei keinem anderen Physiker so nahe lagen, wie bei Einstein selbst, die aber zu einer anderen Gravitationstheorie geführt hätten, wäre Einstein nur auf diese Idee gekommen.

Ein Gedankenexperiment zum Einfluss der Gravitation auf die Frequenz von Licht

Einstein war ein Freund von Gedankenexperimenten. Ihm ist es zu verdanken, dass dieser Begriff Eingang in den englischen Sprachschatz gefunden hat. So hätte sich Einstein zu einem Zeitpunkt, als es die Allgemeine Relativitätstheorie noch gar nicht gab, sicher das folgende Gedankenexperiment ausdenken können, um eine Idee zur Bestimmung der Komponenten des metrischen Tensors zu bekommen:

Wir denken uns die Metrik eines kugelsymmetrischen Gravitationsfeldes, welches wir in Kugelkoordinaten aufschreiben. Die Koordinaten seien so gewählt, dass sie der Beobachtung eines unendlich weit entfernten ruhenden Beobachters entsprechen, wobei die felderzeugende Masse sich im Koordinatenursprung befinden soll. Eine solche Metrik muss aus Symmetriegründen die allgemeine Form:

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{11}(r)dr^2 + \\ &+ r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)d\varphi^2\right) + \\ &+ g_{44}(r)c^2dt^2 \end{aligned} \tag{3}$$

haben. Die Gravitation macht sich bei unserer Koordinatenwahl in einem kugelsymmetrischen Feld nur über die Radius-Radius- und über die Zeit-Zeit-Komponente bemerkbar. Auf Grund der Beziehungen von Raum und Zeit als „Gegenspieler" muss weiterhin die Beziehung:

$$g_{11} = -\frac{1}{g_{44}} \tag{4}$$

Berücksichtigung finden[1]. Wäre es nun möglich, eine der beiden Größen als Funktion des Radius (Abstand vom Gravitationszentrum) zu bestimmen, dann hätten wir eine metrische Beschreibung des kugelsymmetrischen Gravitationsfeldes gefunden. Die Komponente g_{44} determiniert die Zeitmessung im Gravitationsfeld. Dem entsprechend könnte eine Zeitmessung hilfreich zur Bestimmung der Metrik sein. Doch dazu wäre der Zusammenhang zwischen Koordinatenzeit t und Eigenzeit τ zu berücksichtigen. Dieser Zusammenhang ist allgemein durch

$$\Delta\tau = \sqrt{-g_{44}}\Delta t \tag{5}$$

gegeben. Die Eigenzeit ist wichtig, weil eine Uhr stets die Eigenzeit und nicht die Koordinatenzeit misst, die Koordinatenzeit ist in diesem Sinne nur ein Parameter. Eine Frequenz stellt sich dann als das Verhältnis:

[1] Man sieht das auch an der Struktur der Schwarzschild-Metrik selbst.

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}\frac{\Delta t}{\Delta \tau} = \frac{\omega}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{-g_{44}}} \qquad (6)$$

dar. Wir könnten nun an einem Ort r_0 die Frequenz ν_0 eines Lichtteilchens mit einer ruhenden Uhr messen und uns fragen, wie sich diese Frequenz ändert, wenn sich das Lichtteilchen entlang der Radiuskoordinate zum Ort r_1 entfernt, wenn wir zunächst davon ausgehen, dass das Newton'sche Gravitationsgesetz diesen Sachverhalt zu beschreiben gestattet. Wir nehmen nun an, dass die Frequenz des Lichtes die Zeit am jeweiligen Ort taktet.

Nach der klassischen Sicht muss das Licht Arbeit gegen die Gravitation leisten:

$$\begin{aligned} dW &= F(r)dr = \\ &= \gamma \frac{m \cdot M_0}{r^2} dr \end{aligned} \qquad (7).$$

Die Änderung der Energie ist dann:

$$dE = -dW \qquad (8),$$

weil die Arbeit die Energie reduziert. In der Gleichung (7) ist M_0 die große felderzeugende Masse und m ist die Masse des Lichtes. Aber wir wissen, dass Licht gar keine Ruhemasse hat, nur eine Impulsmasse und diese ist durch die Spezielle Relativitätstheorie bestimmt[2]:

$$m = \frac{E}{c^2} \qquad (9)^3.$$

Damit das Licht überhaupt vom Gravitationsfeld beeinflusst werden kann, müssen wir unterstellen, dass die Impulsmasse des Lichtes gemäß dem Äquivalenzprinzip an das Gravitationsfeld ankoppelt. Unterstellen wir weiter, dass die Lichtgeschwindigkeit als konstant anzusehen ist[4], dann muss die Energieminderung (8) zugleich auch eine Minderung der Impulsmasse des Lichtes bewirken. Dann kann die Masse m keine konstante Größe sein, sondern es muss

$$m = m(r) = \frac{E(r)}{c^2} \qquad (10)$$

gelten. Die Trägheit des Lichtes wird durch das Gravitationsfeld (mit) bestimmt[5]. Setzen wir (7) und (8) in (9) ein, dann erhalten wir die Gleichung:

$$dE = -\gamma \frac{E(r)}{c^2}\frac{M_0}{r^2} dr \qquad (11).$$

Wir hätten hier bereits die Möglichkeit, die Funktion $E(r)$ durch Integration der entstehenden Differentialgleichung zu bestimmen. Doch wir möchten eine direkte Beziehung zur Zeitmessung, und vor allen Dingen ist das Wunderjahr noch nicht lange

[2] Durch diese Setzung wird der klassische Interpretationsrahmen, d.h. das klassische Bild verlassen, da in der Newton'schen Physik die Masse eine Konstante sein muss.
[3] Max Planck, 1906

[4] Wir haben uns in die Zeit zwischen 1905 und 1915 versetzt, das Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit war eine fundamentale neue Erkenntnis und diese Erkenntnis unterstellen wir in dem Gedankenexperiment.
[5] Ein interessanter Sachverhalt, der uns sofort an das Machsche Prinzip erinnert, wonach die Trägheit der Körper durch die kosmischen Massen determiniert wird. Die Interpretation als Trägheitsveränderung rechtfertigt die Aussage, dass sich im Verhalten des Lichtteilchens das lokale Zeitverhalten (die metrische Komponente g_{44}) spiegelt. Die Interpretation als Energieverlust durch verrichtete Arbeit, die das Licht gegen das Feld leistet, ist nur ein klassisches heuristisches Vorstellungsbild. Die physikalisch neue Behauptung verbindet den Frequenzgang mit der Eigenzeit, wie es die ART tut, nur wird hier die richtige Quantenbeziehung zu Grunde gelegt.

her[6]. Der Reiz und die Verführung, die Beziehung

$$E = h \cdot \nu \tag{12}$$

in die Untersuchung einzubeziehen, ist einfach zu groß, um ihr zu widerstehen. Daher haben wir

$$\begin{aligned} E(r) &= h \cdot \nu(r) \\ dE &= h \cdot d\nu \end{aligned} \tag{13}$$

zu setzen. Mit (13) wird aus (11):

$$h \cdot d\nu = -\gamma \frac{h \cdot \nu}{c^2} \frac{M_0}{r^2} dr \tag{14}$$

Die Gleichung mit der Nummer einer Glückszahl lassen wir einen Moment auf uns wirken, dann bemerken wir, dass wir es hier mit einer $\gamma - h - c -$ Theorie zu tun haben. Während sich aus (13) der Proportionalitätsfaktor h wegen des Äquivalenzprinzips von Trägheit und passiver Schwere heraus kürzt, bleibt aber der aus der Quantentheorie resultierende proportionale Zusammenhang von Energie und Frequenz seiner Form nach erhalten. Und exakt diesem Umstand ist es geschuldet, dass aus (14) die Differentialgleichung:

$$\frac{d\nu}{dr} + \gamma \frac{M_0}{c^2} \frac{1}{r^2} \nu = 0 \tag{15}$$

folgt, welche die Frequenzabhängigkeit vom Gravitationsfeld beschreibt. Diese homogene Differentialgleichung erster Ordnung kann durch Trennung der Variablen leicht gelöst werden. Die Lösung als Frequenzverhältnis lautet:

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} = e^{\gamma \frac{M_0}{c^2}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right)} \tag{16}$$

Schreiben wir für die Interpretation dieses Verhältnis etwas um:

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{e^{\gamma \frac{M_0}{c^2} \frac{1}{r_1}}}{e^{\gamma \frac{M_0}{c^2} \frac{1}{r_0}}} \tag{17}$$

und vergleichen wir diese Beziehung in dem wir (6) nutzen mit:

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{\frac{1}{\sqrt{-g_{44}(r_1)}}}{\frac{1}{\sqrt{-g_{44}(r_0)}}} \tag{18}$$

dann lässt sich der Zusammenhang:

$$g_{44}(r) = -e^{-2 \cdot \gamma \frac{M_0}{c^2} \frac{1}{r}} \tag{19}$$

ablesen. Mit der Abkürzung:

$$M = \gamma \frac{M_0}{c^2} \tag{20}$$

erhalten wir die kugelsymmetrische Metrik:

$$\begin{aligned} ds^2 = &\frac{1}{e^{-\frac{2M}{r}}} dr^2 + \\ &+ r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta) d\varphi^2\right) - \\ &- e^{-\frac{2M}{r}} c^2 dt^2 \end{aligned} \tag{21}$$

Es ist der von uns so bezeichneten Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik (21) sofort anzusehen, dass sie keine Singularität bei $r = 2M$ aufweist. Es lässt sich zeigen, dass physikalische Zustände auch bei $r = 0$ berechenbar bleiben, denn diese Stelle hat den Charakter einer Kaustischen Singularität.

[6] Gedanklich befinden wir uns auf Grund unserer Zeitreise jetzt im Jahr 1907!

Die Schwarzschild-Lösung als Näherung

Entwickeln wir die e-Funktion in (21) nach Potenzen von $\frac{2M}{r}$ bis zur ersten Ordnung, dann finden wir die Schwarzschild-Metrik:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{1-\frac{2M}{r}} dr^2 + \\ &+ r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)d\varphi^2\right) - \\ &- \left(1-\frac{2M}{r}\right)c^2dt^2 \end{aligned} \qquad (22).$$

Die Näherung (22) impliziert die Erfüllung aller Einstein’schen Effekte im Planetensystem, wie Periheldrehung, Lichtablenkung und Rotverschiebung, wobei Effekte höherer Ordnung praktisch nicht messbar sind. Wir überzeugen uns leicht davon, indem wir nach konkreter Rechnung allein die jeweiligen Terme der nächsthöheren Ordnung ausgerechnet haben.

Periheldrehung

Die Periheldrehung

$$\delta = \Delta\varphi - 2\pi \qquad (23)$$

des Planeten Merkur, konkret der Anteil, der nicht aus Störungen durch die andren Himmelskörper erklärt werden kann, ergibt sich im Falle der Schwarzschild-Metrik[7] aus dem Ausdruck:

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{Perihel}}^{r_{Aphel}} \frac{\frac{B}{r^2}}{\sqrt{A^2 - c^2 + \frac{2Mc^2}{r} - \frac{B^2}{r^2} + \frac{2MB^2}{r^3}}} \qquad (24).$$

Entscheidend für das Auftreten der Periheldrehung ist allein der Term $\propto \frac{1}{r^3}$ im Nenner von (24). Die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik (21) produziert einen die Periheldrehung modifizierenden additiven Zusatzterm $Q(r)$ in der Wurzel von (24):

$$Q(r) = -\frac{2M^2B^2}{r^4} \qquad (25),$$

in der nächst höheren Ordnung der Reihenentwicklung. Bildet man das Verhältnis, ergibt sich:

$$Q(r) \Big/ \frac{2MB^2}{r^3} = 2.121 \cdot 10^{-6} \qquad (26),$$

und es wird evident, wie klein die Korrekturen sind.

Die Lichtablenkung an der Sonne

Die Lichtablenkung an der Sonne wird in der Allgemeinen Relativitätstheorie durch die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2u}{d\varphi} + u = 3Mu^2 \qquad (27)$$

und in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik durch:

$$\frac{d^2u}{d\varphi} + u = 3Mu^2 - 2M^2u^3 \qquad (28)$$

beschrieben, mit $u = \frac{1}{r}$. Auch in diesem Fall überzeugt man sich durch einfaches Einsetzen der Werte für das Perihel, dass der Zusatzterm um den Faktor 10^{-6} kleiner ist als der Term $3Mu^2$.

Die Rotverschiebung an der Erdoberfläche

R. V. Pound und G. A. Rebka, Jr. haben unter Nutzung des Mößbauer-Effektes 1959 die

[7] Die Größe A parametrisiert die Energie, die eine Erhaltungsgröße ist, B parametrisiert den Drehimpuls, der ebenfalls eine Erhaltungsgröße ist.

Rotverschiebung für relativistische Theorien an der Erdoberfläche gemäß der Formel:

$$\Delta\nu = \nu_h - \nu_0 = -\nu_0 \cdot g \cdot h \frac{1}{c^2\left(1+\frac{h}{R}\right)} \qquad (29)$$

nachgewiesen. Dabei sind g die Fallbeschleunigung an der Erdoberfläche, h die Höhe (22,5m) und R der Erdradius. Diese Formel ist sowohl aus der Schwarzschild-Metrik, der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik, aber auch aus Metriken anderer Gravitationstheorien herleitbar, sodass das Experiment keinen spezifischen Beweis für eine bestimmte Gravitationstheorie darstellt.

Lichtlaufzeit an der Erdoberfläche und der Sonne – die effektive Lichtgeschwindigkeit

Ein nicht sehr bekannter 4. Einstein-Effekt ist die ortsabhängige Lichtgeschwindigkeit in metrischen Gravitationstheorien[8], die so genannte effektive Lichtgeschwindigkeit ist abhängig vom Gravitationsfeld. Diese effektive Lichtgeschwindigkeit ist in unseren Metriken durch die Beziehung:

$$c_{eff} = c\sqrt{\frac{g_{44}}{g_{11}}} \qquad (30)$$

bestimmt. Aus der Allgemeinen Relativitätstheorie ergibt sich mit der Schwarzschild-Metrik (SM):

$$c_{eff}^{SM} = c\left(1-\frac{2M}{r}\right) = = 2.99791186044748 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \qquad (31)$$

für den Sonnenrand und aus der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik ergibt sich:

$$c_{eff}^{PESM} = c \cdot e^{-\frac{2M}{r}} = = 2.99791186047446 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \qquad (32),$$

ebenfalls für den Sonnenrand. Der Vergleich liefert eine relative Abweichung von der Allgemeinen Relativitätstheorie von:

$$\frac{c_{eff}^{SM} - c_{eff}^{PSEM}}{c_{eff}^{SM}} = -9 \cdot 10^{-12} \qquad (33).$$

Dieser Wert ist extrem klein und an der Grenze der computernumerisch interpretierbaren Genauigkeit, zumal die Vakuumlichtgeschwindigkeit weniger genau bekannt ist. Die Masse der Erde ist so klein, dass die Computerberechnung den Unterschied Null liefert. Ein Test der effektiven Lichtgeschwindigkeit wäre eigentlich ein direkter Test der Metrik, wären die Effekte nur nicht so verschwindend gering. Aber in der Nähe des Schwarzschild-Radius wären die Unterschiede gemäß Formel (33) extrem. In einem regulären Planetensystem werden die Bewegungen der planetaren Körper, sowie die des Lichtes in beiden Metriken praktisch identisch beschrieben.

Zusammengefasst kann festgestellt werden, dass die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik dieselbe experimentelle Evidenz beanspruchen kann, wie die Schwarzschild-Metrik. Die Schwarzschild-Metrik hat nur den Charakter einer Näherung, und die Singularitätsproblematik ist nur ein mathematisches Artefakt der Näherung, welches keine Realität beanspruchen kann.

Das Singularitätsproblem der ART

Das Singularitätsproblem folgt aus den Einstein'schen Feldgleichungen der Gravitation. Einstein versuchte bei ihrer Konstruktion eine maximale Nähe zur

[8] Dieser Effekt ist für den weit entfernten ruhenden Beobachter messbar, bei einer lokalen Messung hat c stets einen festen Wert, den der Vakuumlichtgeschwindigkeit.

Newton'sche Physik zu sichern, und suchte insbesondere nach einer relativistischen Analogie zur Poisson-Gleichung. Doch damit implementierte er die Eigenschaft, dass die Gravitation beliebig anwachsen kann. Betrachtet man dem gegenüber den quasi-klassischen Grenzfall der Gravitation in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik, z.B. das Potential:

$$U = -\frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2} e^{-\frac{2M}{r}} \qquad (34)$$

oder die Feldstärke:

$$\vec{G} = -\frac{Mc^2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} e^{-\frac{2M}{r}} \qquad (35)$$

oder die exakte Bewegungsgleichung für die Radiuskomponente im Falle des geraden Wurfs:

$$\ddot{r} = \frac{M}{r^2}\dot{r}^2 - \frac{M}{r^2} e^{-\frac{2M}{r}} \qquad (36).$$

Dann erkennt man einen Abschirmungsfaktor. Die Gravitation kann nicht mehr über alle Schranken anwachsen. Sie reguliert sich selbst.

Im Bild der Quantenfeldtheorie gesprochen, besagen die Ergebnisse, dass sich Gravitonen, bezüglich ihrer gravitativen Eigenschaften genauso wie Lichtteilchen verhalten müssen, und tatsächlich müssen Gravitonen ruhemasselose Teilchen sein. Die Wechselwirkung zwischen Licht und Gravitonen sollte dann auf ähnliche Weise funktionieren, wie Gravitonen mit Gravitonen wechselwirken. Bleibt man im Quantenbild und beurteilt das Verhalten von Gravitonen newtonisch, so müssen wir uns an das Bild der Kraftlinien erinnern. In diesem Bild ändert sich mit zunehmendem Abstand vom Gravitationszentrum die Flächendichte der Kraftlinien in der Oberfläche einer gedachten Kugelschale, weil sich die konstante Anzahl der Kraftlinien mit zunehmendem Abstand auf eine immer größere Fläche verteilt. Aber die einzelne Kraftlinie behält ihre Stärke bei, übertragen auf das Bild der Gravitonen, nimmt die Energie eines Gravitons nicht ab. In unserem Bild wird die Abnahme der Flächendichte der Kraftlinien um den Aspekt ergänzt, dass die Gravitonen selbst Arbeit gegen das Gravitationsfeld leisten und dadurch Energie verlieren. Unterstellt ist also eine Gravitonen-Gravitonen-Wechselwirkung. Diese Gravitonen-Gravitonen-Wechselwirkung vermittelt eine Selbstabschirmung der Gravitation. Insgesamt ist das aus der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik resultierende physikalische Verständnis eine sehr einfache Ergänzung des Newton'schen Bildes.

Allgemeine Relativitätstheorie und Quantenbeziehung

Wir wollen nun zeigen, dass sich die Schwarzschild-Metrik ähnlich wie die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik unter Verwendung einer Quantenbeziehung herleiten lässt. Es wird dabei evident, dass die Quantenbeziehung, die wir zur Herleitung der Schwarzschild-Metrik voraussetzen müssen, nicht mit der Quantenphysik gemäß Planck, Einstein, Heisenberg, Schrödinger und Dirac verträglich ist. Wir sehen darin den Grund, warum es nicht möglich ist, die Allgemeine Relativitätstheorie auf ein quantenphysikalisches, bzw. quantenfeldtheoretisches Fundament zu stellen. Zur Herleitung gehen wir zunächst wieder in das klassische Bild. Die Arbeit dW ist definiert als Produkt zwischen der Kraft F, die entlang eines Weges dr wirkt, d.h., wir verwenden wieder die Beziehung (7), die wir hier für eine bessere Lesbarkeit noch einmal aufschreiben und eine fortlaufende Nummer geben:

$$dW = Fdr \quad (37).$$

Wir verwenden auch wieder die Beziehung (8) für die Änderung der Energie des Photons oder Gravitons:

$$dE = -dW \quad (38)$$

und die Beziehung (9) für die Beziehung zwischen Energie und Impulsmasse:

$$m = \frac{E}{c^2} \quad (39).$$

Doch anstelle der korrekten quantenphysikalischen Beziehung (12) zwischen Energie und Frequenz eines Quants verwenden wir die erfundene Beziehung:

$$E = h_E \cdot e^{-\frac{\nu_\infty^2}{2\nu^2}} \quad (40).$$

Die Größe h_E ist nicht das Planck'sche Wirkungsquantum, sondern ist ein Energiequantum, was durch den Index gekennzeichnet werden soll. Die Größe ν_∞ ist die Frequenz des Quants, welche verbleibt, wenn es ins Unendliche entkommen ist. Wir benötigen nun noch die Ableitung von (40), diese ist in bereits umgeschriebener Form:

$$dE = h_E \nu_\infty^2 \nu^{-3} e^{-\frac{\nu_\infty^2}{2\nu^2}} d\nu \quad (41).$$

Das Newton'sche Gravitationsgesetz schreiben wir betragsmäßig mit der Abkürzung (20) auf:

$$F = \frac{m \cdot M \cdot c^2}{r^2} \quad (42).$$

Gehen wir nun mit all diesen Beziehungen in (38) ein, dann folgt:

$$\nu_\infty^2 \nu^{-3} d\nu = -Mr^{-2} dr \quad (43).$$

Die unbestimmte Integration von (43) ergibt:

$$-\frac{1}{2}\nu_\infty^2 \nu^{-2} = \frac{M}{r} + C \quad (44).$$

Stellen wir diese Beziehung nach $\nu_\infty \nu^{-1}$ um, dann folgt:

$$\nu_\infty \nu^{-1} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \quad (45),$$

unter der Voraussetzung, dass wir

$$C = -\frac{1}{2} \quad (46)$$

gesetzt haben. Wir sehen an (45), dass genau durch diese Wahl von C die Größe ν_∞ definiert wird und dadurch einen interpretierbaren Sinn bekommt. Die Beziehung (45) führt genau auf die Beziehung für die Rotverschiebung, wie sie aus der Schwarzschild-Metrik folgt:

$$\frac{\nu_\infty \nu_0^{-1}}{\nu_\infty \nu_1^{-1}} = \frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_0}}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_1}}} \quad (47).$$

Auf Grund der allgemeinen Beziehung:

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} = \sqrt{\frac{-g_{44}(0)}{-g_{44}(1)}} \quad (48),$$

lesen wir:

$$g_{44} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (49)$$

ab. Wegen der speziellen Symmetrie unseres Koordinatensystems[9]:

[9] Zur Erinnerung: Das Koordinatensystem ist mit dem Bezugssystem eines unendlich weit entfernten ruhenden Beobachters verbunden, in Kugelkoordinaten gegeben und der Ursprung liegt im Gravitationszentrum.

$$g_{11} = -\frac{1}{g_{44}} \tag{50}$$

folgt die Schwarzschild-Metrik:

$$ds^2 = \frac{1}{1-\frac{2M}{r}}dr^2 + \\ + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)d\varphi^2\right) - \\ -\left(1-\frac{2M}{r}\right)c^2dt^2 \tag{51}$$

Wie es scheint, ist die Quantenmechanik mit der Relativistik verknüpft. Dies fällt aber darum nicht auf, weil sich das Planck'sche Wirkungsquantum h oder unser erfundenes Energiequantum h_E auf Grund des schwachen Äquivalenzprinzips herauskürzt. Der funktionale Zusammenhang zwischen Frequenz eines Teilchens und seiner Energie übt aber ersichtlich einen Einfluss auf die Struktur der Metrik aus. Tatsächlich enthalten ja sowohl die Gravitationskonstante:

$$[\gamma] = \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \tag{52}$$

und das Planck'sche Wirkungsquantum:

$$[h] = \frac{kg \cdot m^2}{s} \tag{53}$$

dieselben Grundeinheiten von Masse, Länge und Zeit. Die Lichtgeschwindigkeit enthält nur die Länge und die Zeit. Es lässt sich zeigen, dass sich diese Naturkonstanten trotz dieser Gemeinsamkeiten nicht aufeinander reduzieren lassen. Damit müssen sie eine umfassende aber zusammenhängende physikalische Grundstruktur definieren. Anders wäre es überhaupt nicht zu verstehen, dass sich Naturkonstanten durch gleiche Basiseinheiten auszeichnen, aber sonst nichts miteinander zu tun haben sollen. Die Gravitationskonstante verbindet die Masse und wegen der Masse-Energie-Beziehung auch die Energie mit einer Gravitationswirkung. Die grundlegende quantenphysikalische Beziehung:

$$\frac{h}{E} = \frac{1}{\nu} = T \tag{54}$$

macht jedes Elementarteilchen zu einer natürlichen Uhr mit der Taktzeit T, die im Ruhesystem des Elementarteilchens die Eigenzeit taktet. Das ist die eigentliche Aussage der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik. In der Schwarzschild-Metrik der Allgemeinen Relativitätstheorie wäre dies aber nur dann so, wenn (40) als Quantenbeziehung zu verstehen wäre. Tatsächlich nimmt die Allgemeine Relativitätstheorie aber überhaupt keinen Bezug auf den Quantencharakter der Materie, da sich die Feldgleichungen, wie bereits geschildert, anderen Intentionen verdanken. Die „Heilung" der Gravitation von ihrem Singularitätsproblem ist ein schwerwiegendes Argument für die Richtigkeit der vorgetragenen Überlegungen, das gilt insbesondere vor dem Hintergrund der exzellenten empirischen Evidenz, welche die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik nur mit der Schwarzschild-Metrik aus der Allgemeinen Relativitätstheorie selbst gemeinsam hat.

Quellen

Ausschließlich eigene Rechnungen, z.T. auf www.astronomie-magdeburg.de/astrophyisk veröffentlicht.