Ist die Ursache des Singularitätsproblems der Allgemeinen Relativitätstheorie ein falsches klassisches Gravitationsgesetz?

Klaus Retzlaff

Zusammenfassung: Das kugelsymmetrische Vakuumfeld (Schwarzschild-Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen) kann unter spezifischen physikalisch-mathematischen Voraussetzungen unter Zugrundelegung eines klassischen Gravitationsgesetzes konstruiert werden. Das klassische Gravitationsgesetzt, welches die Konstruktion der Schwarzschild-Metrik ermöglicht, stimmt nicht mit dem Newtonschen Gravitationsgesetz überein. Einerseits enthält es das Newtonsche Gesetz als Grenzfall, andererseits weist dieses klassische Gesetz eine Feld-Singularität bei $r = 2M$ *(dem Schwarzschild-Radius) auf, für die es keine physikalische Determination gibt. Wird dem gegenüber unter sonst gleichen physikalisch-mathematischen Voraussetzungen das Newtonsche Gravitationsgesetz zugrunde gelegt, welches keine Singularität am Schwarzschild-Radius enthält, führt die mathematische Konstruktion auf eine singularitätsfreie allgemein-relativistische Metrik, die alle Einstein-Effekte im Planetensystem mit einer Abweichung in der Größenordnung* 10^{-6} *reproduziert. Vor diesem Hintergrund stellen sich die Fragen, ob die Allgemeine Relativitätstheorie ein falsches klassisches Gravitationsgesetz zur Voraussetzung hat und ob in der Folge die Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie prinzipiell eine korrekte Darstellung der Gravitation ergeben können.*

Wie stets wird für Interessierte und Studenten alles in kleinen Schritten vorgerechnet.

***

Klassisches Gravitationsgesetz und Schwarzschild-Lösung

Der Zusammenhang zwischen klassischer Gravitation und Allgemeiner Relativitätstheorie im Zentralfeld wird über den Zusammenhang zwischen der Zeit-Zeit-Komponente des metrischen Tensors und dem Potential

$$g_{44} = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) \qquad (1)$$

mit

$$\phi = -\frac{Mc^2}{r} \qquad (2)$$

und der Abkürzung[1]

$$M = \frac{\gamma}{c^2} \cdot M_0 \qquad (3)$$

dargestellt. Diese Betrachtung steht in einem engen Zusammenhang mit der Diskussion des klassischen Grenzfalls der Allgemeinen Relativitätstheorie. Demnach ist die Newtonsche Gravitation als klassischer Grenzfall der allgemeinen Relativitätstheorie zu betrachten, nämlich in schwachen Feldern, wenn die Energiedichte die wesentliche Feldquelle ist, die Metrik nur wenig von der Minkowski-Struktur abweicht und Bewegungen verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit nur langsam verlaufen. Auf der anderen Seite ist es möglich, die allgemein-relativistische Schwarzschild-Lösung auch unter spezifischen Annahmen unter Zugrundelegung eines klassischen, aber nicht Newtonschen Gravitationsgesetzes zu konstruieren.

Konstruktion der Schwarzschild-Lösung

Zur Konstruktion der Schwarzschild-Lösung gehen wir zunächst von der klassischen Sichtweise aus, dass in einem gegebenen Gravitationsfeld ein Lichtquant Arbeit gegen dieses Feld leistet, und dadurch Energie verliert. Der Energieverlust ist dann durch

$$dE = -K(r)dr \qquad (4)$$

gegeben, wenn wir von einem radialsymmetrischen Feld ausgehen und sich das Lichtteilchen von der Zentralmasse entfernt. Um später im Rahmen des

[1] γ: Newtonsche Gravitationskonstante, c: Vakuumlichtgeschwindigkeit, M_0: Zentralmasse

Übergangs zur allgemein-relativistischen Darstellung der Gravitation auf die Schwarzschild-Lösung zu kommen, muss der Betrag der Gravitationskraft die Form[2]

$$K(r)=\frac{m}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\cdot\frac{Mc^2}{r^2} \qquad (5)$$

haben, während der Betrag der Newtonschen Gravitationskraft durch die Beziehung

$$K_{Newton}(r)=m\cdot\frac{Mc^2}{r^2} \qquad (6)$$

definiert ist. Wir werden nachher zeigen, dass die Verwendung von (6) auf eine singularitätsfreie Metrik führt. Es ist nun aber zunächst als bemerkenswertes Faktum festzustellen, dass die Gravitationskraft gemäß der Beziehung (5) bereits die Singularität enthält, die sich in der Schwarzschild-Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen als die berühmte Schwarzschild-Singularität geltend macht.

Setzen wir die Beziehung (5) in die Gleichung (4) ein, so ergibt sich

$$dE=-\frac{m}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\cdot\frac{Mc^2}{r^2}dr \qquad (7).$$

Um die Konstruktion fortzusetzen muss die Lichtteilchenmasse durch eine Beziehung aus der Speziellen Relativitätstheorie ausgedrückt werden:

$$dE=-\frac{\frac{E}{c^2}}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\cdot\frac{Mc^2}{r^2}dr \qquad (8).$$

Unter Bezugnahme auf die Quanteneigenschaften des Lichtes kann die Energie, bzw. der Energieverlust durch die Beziehungen

$$E=h\cdot\nu \qquad (9)$$

und

$$dE=h\cdot d\nu \qquad (10)$$

ausgedrückt werden. Durch Einsetzen in die Gleichung (8) folgt:

$$h\cdot d\nu=-\frac{\frac{h\cdot\nu}{c^2}}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\cdot\frac{Mc^2}{r^2}dr \qquad (11).$$

Die Beziehung (11) führt auf eine Differentialgleichung zur Bestimmung der Funktion $\nu(r)$, doch es macht keinen Sinn, diese aufzustellen, denn in (11) lassen sich sofort die Variablen trennen und das Integral aufschreiben:

$$\int_{\nu_0}^{\nu_1}\frac{d\nu}{\nu}=-\int_{r_0}^{r_1}\frac{1}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)}\cdot\frac{M}{r^2}dr \qquad (12).$$

Die Integration von (12) führt auf die Beziehung

$$\ln(\nu_1)-\ln(\nu_0)=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{r_1}}}\right)-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{r_0}}}\right) \qquad (13).$$

Statt die kompliziertere Integration der rechten Seite vorzuführen, beweisen wir durch Ableitung, dass (13) auf (12) führt.

Beweis: Zunächst bringen wir die abzuleitende Funktion $f(r)$ in eine günstige Form:

$$f(r)=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{r}}}\right)=$$

$$=\ln(1)-\ln\left(\sqrt{1-\frac{2M}{r}}\right)= \qquad (14).$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left(1-\frac{2M}{r}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}\ln\left(1-2Mr^{-1}\right)$$

Nun bilden wir die Ableitung und finden

$$\frac{d}{dr}f(r)=-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{2M}{r}}\cdot\frac{2M}{r^2}=$$

$$=-\frac{1}{1-\frac{2M}{r}}\cdot\frac{M}{r^2} \qquad (15),$$

[2] m ist die Impulsmasse des Lichtquants.

was zu beweisen war.
Nun kommen wir zurück auf unsere Beziehung (13) und formen diese etwas um:

$$\ln\frac{\nu_1}{\nu_0} = \ln\frac{\sqrt{1-\frac{2M}{r_0}}}{\sqrt{1-\frac{2M}{r_1}}} \qquad (16).$$

Wir erkennen die Beziehung

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{\sqrt{1-\frac{2M}{r_0}}}{\sqrt{1-\frac{2M}{r_1}}} \qquad (17).$$

Diese Beziehung beschreibt bereits die exakte Frequenzveränderung eines Lichtteilchens, wie sie aus der Allgemeinen Relativitätstheorie, konkret aus der Schwarzschild-Metrik, folgt. Allerdings ist dieses Ergebnis erst einmal das Resultat einer Herleitung, der ein modifiziertes aber dennoch klassisches Gravitationsgesetz zugrunde liegt. Daher ist in dieser Sichtweise die Frequenzverschiebung das Resultat des Vorgangs, bei dem das Licht Arbeit gegen das Gravitationsfeld verrichten muss. In der Allgemeinen Relativitätstheorie ist die Frequenzänderung durch den Einfluss der Gravitation auf die lokalen Trägheitsverhältnisse, und daher auf den unterschiedlichen Uhrengang zurückgeführt. Erst, wenn das Ergebnis (17) in diesem Sinne gedeutet und entsprechend mathematisch verarbeitet wird, ist es auch ein allgemein relativistisches Resultat, d.h. eine Konsequenz der metrischen Struktur der Raum-Zeit[3].

Der Übergang zur allgemeinen Relativistik erfolgt so, dass das kugelsymmetrische Koordinatensystem das Bezugssystem des unendlich weit entfernten ruhenden Beobachters repräsentiert, wobei der Koordinatenursprung mit der punktförmig gedachten Zentralmasse zusammenfällt. Der Einfluss der Schwere des Lichtteilchens auf die Metrik wird als vernachlässigbar betrachtet. Die Koordinatenzeit t ist dadurch die Eigenzeit des unendlich weit entfernten ruhenden Beobachters.
Für den Zusammenhang zwischen Koordinatenzeit und Eigenzeit τ gilt universell die Beziehung

$$\Delta\tau = \sqrt{-g_{44}}\cdot\Delta t \qquad (18).$$

Der Zusammenhang zwischen der Frequenz ν einer monochomatischen Welle und der Koordinatenzeit ist daher durch

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi}\cdot\frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{\omega}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{-g_{44}}} \qquad (19)$$

gegeben und offensichtlich ausschließlich durch die Zeit-Zeit-Komponente des metrischen Tensors bestimmt.
Das Verhältnis von Frequenzen an zwei verschiedenen Abständen r_0 und r_1 ist in der allgemeinen Relativistik (nicht nur in der Allgemeinen Relativitätstheorie) aufgrund von (19) durch

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{\sqrt{-g_{44}(r_0)}}{\sqrt{-g_{44}(r_1)}} \qquad (20)$$

bestimmt[4]. Der Vergleich von (17) mit (20) lässt uns

---

[3] Es sei angemerkt, dass die Gravitation klassisch als konservative Kraft, allgemein-relativistisch als Eigenschaft der metrischen Struktur aufzufassen ist. Beim Übergang vom klassischen Gesetz zur allgemeinen Relativistik erfolgt die Ersetzung der konservativen Kraft durch die entsprechende metrische Struktur. Dadurch wird das schwache Äquivalenzprinzip von Trägheit und passiver Schwere verwirklicht. Auf diese Weise ist der Begriff der passiven Schwere auf den Begriff der Trägheit zurückgeführt. Das starke Äquivalenzprinzip ist bei solcher Art von Konstruktionen, wie hier vorgeführt, ausschließlich in der Allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins verwirklicht.

[4] Dass das Frequenzverhältnis, welches aus einer klassischen Gravitationstheorie hergeleitet wird, mit einem Frequenzverhältnis identifiziert werden kann, welches aus einer allgemein-relativistischen Theorie folgt, ist als Postulat aufzufassen. Dieses Postulat findet seine alleinige Berechtigung in der empirischen Evidenz, welche durch die Einstein-Effekte im Planetensystem gegeben sind. Ebenso ist die Theorieunabhängigkeit der Beziehung (22) als Postulat aufzufassen, welches nicht zwingend erfüllt sein muss. Es gibt Gravitationstheorien, welche nicht auf (22) führen, diese Theorien sind durch die Verletzung des Postulates (22) nicht

$$-g_{44}(r) = 1 - \frac{2M}{r} \qquad (21)$$

erkennen. Wird nun im zweiten Schritt die Symmetrie

$$g_{11} = -\frac{1}{g_{44}} \qquad (22)$$

übernommen, die wir von der Schwarzschild-Metrik kennen, dann folgt für die Radius-Radius-Komponente des metrischen Tensors

$$g_{11} = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \qquad (23).$$

Die vollständige Metrik in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + \\ &+ r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)d\varphi^2\right) - \qquad (24) \\ &- \left(1 - \frac{2M}{r}\right)c^2 dt^2 \end{aligned}$$

ist die berühmte Schwarzschild-Metrik (Karl Schwarzschild, 1917). Sie ist eine eindeutige und strenge Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen.

Im Ausgangspunkt haben wir nicht die Einstein'schen Feldgleichungen verwendet, um daraus die Schwarzschild-Metrik herzuleiten, sondern wir verwendeten ein seltsames klassisches Gravitationsgesetz, nämlich die Beziehung (5). Wir interpretierten die aus diesem Gesetz folgende Frequenzänderung im Gravitationsfeld um, indem wir diese als Folge der metrischen Struktur einer allgemein-relativistischen Raum-Zeit betrachteten und unter dieser Voraussetzung die Konstruktion der Metrik bewerkstelligten. Aus der Evidenz des Newtonschen Gesetzes im Planetensystem folgerten wir, dass die Schwarzschild-Metrik in einer Beziehung zu einem falschen klassischen Gravitationsgesetz steht und genau das der Grund für das Auftreten des Singularitätsproblems sei. Man kann durchaus die Frage nach der Berechtigung eines solchen Vorgehens und damit auch nach der Berechtigung für die entsprechenden sehr weitgehenden Schlussfolgerungen stellen. Unklar ist aber, was als Einwand vorgetragen werden kann.

Tatsächlich führt die Konstruktion der Metrik in der vorgeführten Weise auf eine physikalisch unproblematische, nämlich singularitätsfreie Metrik, wenn man anstelle des seltsamen Gesetzes (5) einfach das Newtonsche Gravitationsgesetz benutzt. Das zeigen wir jetzt.

Konstruktion einer singularitätsfreien allgemein-relativistischen Metrik auf Basis der Newtonschen Gravitation

Wir gehen wieder von der klassischen Gleichung (4) aus, doch statt der Kraft gem. (5) verwenden wir das Newtonsche Gravitationsgesetz (6). An die Stelle der Beziehung (7) tritt dann die Beziehung

$$dE = -m \cdot \frac{Mc^2}{r^2} dr \qquad (25).$$

Unter Verwendung von

$$\frac{E}{c^2} = m \qquad (26),$$

sowie (9) und (10), folgt die zu (11) analoge Beziehung

$$h \cdot d\nu = -\frac{h \cdot \nu}{c^2} \cdot \frac{Mc^2}{r^2} dr \qquad (27),$$

in der wir aus didaktischen Gründen zunächst das Kürzen unterlassen haben. Kürzen und das Trennen der Variablen ergibt das Analogon zu (12), nämlich

$$\int_{\nu_0}^{\nu_1} \frac{d\nu}{\nu} = -\int_{r_0}^{r_1} \frac{M}{r^2} dr \qquad (28).$$

Die Integration ist einfach und schön. Es ergibt sich in Analogie zu (16) der Ausdruck

$$\ln \frac{\nu_1}{\nu_0} = M\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right) \qquad (29).$$

Bringen wir die Logarithmusfunktion zum Verschwinden, finden wir das wichtige Verhältnis

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{e^{-\frac{M}{r_0}}}{e^{-\frac{M}{r_1}}} \qquad (30).$$

---

automatisch falsch. In letzter Instanz kann darüber nur das Experiment entscheiden.

In Analogie zu (21) führt uns die Betrachtung von (30) auf

$$-g_{44}=e^{-\frac{2M}{r}} \tag{31}$$

und mittels (22) folgt

$$g_{11}=\frac{1}{e^{-\frac{2M}{r}}} \tag{32}.$$

Die allgemein-relativistische Metrik für das kugelsymmetrische Vakuumfeld ist dann durch

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{e^{-\frac{2M}{r}}}+ \\ &+r^2\left(d\vartheta^2+\sin^2(\vartheta)d\varphi^2\right)- \\ &-e^{-\frac{2M}{r}}c^2dt^2 \end{aligned} \tag{33}.$$

gegeben und wird als Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik bezeichnet. Die Metrik löst das Singularitätsproblem durch ein Prinzip der Selbstregulation der Schwerkraft vollständig auf und sie hat die volle empirische Evidenz im Planetensystem, sie liefert alle Einstein'schen Effekte korrekt. Abweichungen liegen in der nicht messbaren Größenordnung von 10^{-6}, vergleiche [1], [2], [3] und [4].

In den zitierten Arbeiten [1] bis [4] sind verschiedene Aspekte der Beziehungen zwischen der ART[5] und der Newtonschen Gravitationstheorie, Beziehungen zur Quantenmechanik und Beziehungen zwischen der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik und der Schwarzschild-Metrik untersucht worden. Wir wollen einige Ergebnisse dieser Untersuchung hier kurz nennen, um die Brisanz aufzuzeigen: In [2] wurde gezeigt, dass die Schwarzschild-Metrik auf Basis der hier vorgeführten Deduktion nur unter Verwendung einer unphysikalischen Quantenbeziehung folgt, wenn zugleich vom Newtonschen Gravitationsgesetz (6) ausgegangen wird. Verwendet man dagegen das Newtonsche Gravitationsgesetz (6) und die korrekte Quantenbeziehung (9), bzw. (10), folgt die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik – das wurde hier noch einmal vorgeführt. Um auf Basis der korrekten Quantenbeziehung die Schwarzschild-Metrik zu erhalten, muss auf das sehr eigenartige und physikalisch nicht begründbare Gravitationsgesetz (5) zurückgegriffen werden. Das ist ein klassisches Gravitationsgesetzt, welches die Schwarzschild-Singularität als echte Singularität bereits in sich enthält. Es sieht also so aus, als würde die Metrik der ART die Singularität am Schwarzschild-Radius aus diesem unsinnigen klassischen Gesetz erben. Das unsinnige klassische Gesetz (5) verändert in der Relativistik die Metrik so stak, dass die Metrik nicht mehr durch das Kugelkoordinatensystem beschrieben werden kann, ohne dass eine kaustische Singularität auftritt. Das ist zu betonen, denn dem gegenüber verhält sich die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik völlig gutmütig und hat, wie bereits gesagt und gezeigt, die volle empirische Evidenz im Planetensystem. Diese Umstände lassen es als notwendig erscheinen, die Begründung der ART und insbesondere die Diskussion um den klassischen Grenzfall noch einmal[6] vorzunehmen. So betrachtet stellt die Schwarzschild-Singularität überhaupt gar keinen allgemein-relativistischen Effekt dar. Sie ist ein Artefakt einer Näherung, wenn nämlich die Schwarzschild-Metrik als Näherung der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik angesehen wird, was sie in der Tat ist.

Das Newtonsche Gravitationsgesetz als Grenzfall von (5)

Dem Nenner von (5) ist es anzusehen, dass er für hinreichend große Abstände gegen 1 konvergiert. Aus diesem Grund muss das Gesetz (5) in das Gesetz (6) übergehen. Wir können das auch exakt zeigen. Formen wir die Beziehung (5) etwas um

$$K(r)=m\frac{\frac{c^2}{2}\frac{2M}{r}}{1-\frac{2M}{r}}\cdot\frac{1}{2M}\cdot\frac{2M}{r} \tag{34},$$

definieren wir

[5] ART = Allgemeine Relativitätstheorie

[6] Diskussionen zum klassischen Grenzfall der ART sind kein Gegenstand der Forschung mehr, solche Betrachtungen erfolgen nur noch im Rahmen der spezialisierten Studentenausbildung.

$$x = \frac{2M}{r} \quad (35)$$

und substituieren entsprechend, dann finden wir durch Reihenentwicklung die mathematisch schöne Reihe

$$K(x) = m\frac{\frac{c^2}{2}x}{1-x} \cdot \frac{1}{2M} \cdot x = \quad (36).$$
$$= m \cdot \frac{c^2}{4M} \cdot \left(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \ldots\right)$$

Vernachlässigen wir entsprechend unserer Grenzwertbetrachtung die Terme höherer Ordnung, dann finden wir nach Rücksubstitution das Newtonsche Gravitationsgesetz (6):

$$K(r) = m \cdot \frac{c^2}{4M} \cdot \frac{4M^2}{r^2} = m \cdot \frac{Mc^2}{r^2} \quad (37).$$

Wir behalten diese Tatsache im Hinterkopf und wollen nun zeigen, dass das Gravitationsgesetz (5) als Grenzfall auch aus der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik konstruiert werden kann.

Das Gravitationsgesetz (5) als Grenzfall der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Jetzt entwickeln wir (31) als Reihe. Die Reihenentwickelung ergibt

$$-g_{44} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{2M}{r}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{2M}{r}\right)^3 + \frac{1}{24}\left(\frac{2M}{r}\right)^4 - \ldots \quad (38).$$

Vernachlässigt man die Terme der höheren Ordnung, dann ergibt sich

$$-g_{44} \approx 1 - \frac{2M}{r} \quad (39).$$

Das ist die Zeit-Zeit-Komponente der Schwarzschild-Metrik, die mit dem Gravitationsgesetz (5), wie gezeigt, in Beziehung steht. Auch das behalten wir im Hinterkopf.

Modulation allgemein-relativistischer Kreisbewegung durch klassische Gravitationsgesetze

Wir untersuchen jetzt die einfachste Bewegung, die Kreisbewegung im kugelsymmetrischen Gravitationsfeld. Konkret interessieren uns die Winkelgeschwindigkeiten.

Die Kreisbewegung im Newtonschen Gravitationsfeld wird durch die Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\varphi}_{Newton} = \sqrt{\frac{Mc^2}{r^3}} \quad (40)$$

beschrieben.

Die Kreisbewegung, wie sie sich aus der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik ergibt, ist durch

$$\dot{\varphi}_{PESM} = \sqrt{1 + \frac{M}{r}} \cdot \dot{\varphi}_{Newton} \quad (41)$$

gegeben, wobei auf Grund der Relativistik der Punkt auf der linken Seite die Ableitung nach der Eigenzeit, nicht nach der Koordinatenzeit meint, vergleiche [1]. Ersichtlich weisen weder (40) noch (41) für $r > 0$ irgendeine Singularität auf. Nur für $r = 0$ muss die Winkelgeschwindigkeit aufgrund der Drehimpulserhaltung divergieren.

Die Allgemeine Relativitätstheorie führt in der Schwarzschild-Metrik auf die Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\varphi}_{ART} = \sqrt{\frac{1 + \frac{M}{r-3M}}{1 - \frac{2M}{r}}} \cdot \dot{\varphi}_{Newton} \quad (42).$$

Wieder repräsentiert der Punkt auf der linken Seite die Ableitung nach der Eigenzeit, nicht nach der Koordinatenzeit. Die Winkelgeschwindigkeit (42) weist gleich zwei singuläre Stellen auf, die erste Stelle ist bei $r = 2M$, d.h., sie tritt an dem berühmten Schwarzschild-Radius auf. Die zweite Singularität liegt außerhalb des Schwarzschild-Radius bei $r = 3M$ und spielt eine zentrale Rolle für die Theorie des Gravitationskollapses, denn unterschreitet der Radius eines Sterns der Masse M erst einmal diesen Bereich, dann ist der Gravitationskollaps unaufhaltsam, weil keine stabilen Kreisbahnen mehr existieren. Damit sich ein Körper mit einer Ruhemasse ungleich null auf dem Radius $r = 3M$ auf einer Kreisbahn bewegen kann, muss er eine unendliche Bewegungsenergie besitzen. Der Radius $r = 3M$ markiert eine Grenze, ab der eine Art „Staubsauger-Effekt“ jeden Partikel ins Schwarze Loch zu ziehen vermag.

Nun untersuchen wir die Winkelgeschwindigkeit für das Gesetz (5), um es mit (40) bis (42) zu vergleichen. Die Radialkraft K_r ist proportional zum Quadrat der Kreisbahngeschwindigkeit v und umgekehrt proportional zum Kreisbahnradius r. Der Proportionalitätsfaktor ist die träge Masse m des Probekörpers, es gilt:

$$K_r = m \cdot \frac{v^2}{r} \qquad (43).$$

Die Radialkraft (43) ist im Gleichgewicht mit der Gravitationskraft $K(r)$, gemäß der Gleichung (5), es gilt:

$$K_r = K(r)$$

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \cdot \frac{Mc^2}{r} \qquad (44).$$

Der Zusammenhang zwischen der Kreisbahngeschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit ist

$$v = \dot{\varphi} \cdot r \qquad (45).$$

Das Einsetzen von (45) in (44) und anschließendes Umstellen nach $\dot{\varphi}$ führt auf die gesuchte Beziehung:

$$\dot{\varphi}_{(5)} = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}} \cdot \dot{\varphi}_{Newton} \qquad (46).$$

Schlussfolgerung

Aus dem Vergleich der verschiedenen Winkelgeschwindigkeiten lassen sich die folgenden Schlussfolgerungen ziehen:

1. Die Form der Kreisbahngeschwindigkeit (41) zeigt die klinisch reine Form des Übergangs vom Newtonschen Gravitationsgesetz zu einer allgemeinen relativistischen kugelsymmetrischen Metrik und der aus ihr herleitbaren Kreisbahngeschwindigkeit. Demnach gibt es keinen Grund für die Annahme der Existenz gravitativer Singularitäten.
2. Die Kreisbahngeschwindigkeit (46) ist rein klassischer-physikalischer Natur, ihre Form resultiert unmittelbar aus dem unphysikalischen Kraftgesetz (5).
3. Die aus der Schwarzschild-Metrik resultierende Kreisbahngeschwindigkeit (42) zeigt drei jetzt gut interpretierbare Strukturen auf. Bezeichnen wir $\Omega_K = 3M$ als Kollaps-Radius und $\Omega_S = 2M$ als Schwarzschild-Radius, dann lässt sich die Beziehung (42) auch so schreiben:

   $$\dot{\phi}_{ART} = \sqrt{\frac{1 + \frac{M}{r - \Omega_K}}{1 - \frac{\Omega_S}{r}}} \cdot \dot{\phi}_{Newton} \qquad (47).$$

   Für $\Omega_K = \Omega_S = 0$ geht (42), bzw. (47) direkt in die singularitätsfreie Beziehung (41) aus der singularitätsfreien Metrik über. Wir ziehen daraus den Schluss, dass der Term $\sqrt{1 + \frac{M}{r}}$ der eine Folge des Übergangs vom Newtonschen Gravitationsgesetz in die allgemeine Relativistik ist, in der ART in modifizierter Form (unrein) auftritt. Der Term $1 - \frac{\Omega_K}{r}$ ist ein reines Artefakt des falschen Gravitationsgesetzes (5). Schließlich und endlich ist auch der Kollaps-Radius Ω_K das Resultat des Übergangs in die allgemeine Relativistik auf Basis des falschen Gravitationsgesetzes (5).
4. Nur aufgrund der Tatsache, dass Ω_K und Ω_S so extrem klein sind, sie liegen in der Größenordnung von weniger als 10^{-7} Sonnenradien, kann die Allgemeine Relativitätstheorie im Planetensystem als so erfolgreich gelten. Wegen der geringen

Größe dieser Artefakte gilt im Planetensystem $\dot{\phi}_{ART} \approx \dot{\phi}_{PES}$.

5. Die Tatsache, dass die Schwarzschild-Lösung nur eine Näherung einer eigentlich singularitätsfreien Metrik ist, führt auf die Vermutung, dass die Einstein'sche Gravitationstheorie (ART) nur dadurch ein Singularitätsproblem besitzt, weil sie selbst nur die Näherung eines eigentlich singularitätsfreien Gravitationsgesetzes darstellt. Die Schwarzschild-Singularität ist ebenso ein Artefakt der Näherung, wie das seltsame Gesetz (5).

Quellen

[1] K. Retzlaff, „Einstein- und Post-Einstein-Effekte im Zentralfeld", epubli, 2017, ISBN 978-3-7450-1863-9

[2] K. Retzlaff, „Über die quantenmechanische Determination der makroskopischen Raum-Zeit-Metrik", AGM[7], 2017

[3] K. Retzlaff, „Vom Newtonschen Gravitationsparadoxon zur singularitätsfreien allgemein-relativistischen Gravitationstheorie", AGM, 2017

[4] K. Retzlaff, „Antigravitation im quasi-klassischen Grenzfall der singularitätsfreien allgemein-relativistischen Gravitationstheorie", AGM, 2017

[7] Die Artikel sind auf der Webseite der Astronomische Gesellschaft Magdeburg e.V. http://astronomie-magdeburg.de/astrophysik zu finden.