Antigravitation in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff

5.11.2017

Zusammenfassung: Für die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik der singularitätsfreien allgemein relativistischen Gravitationstheorie [1] wird der Selbstabschirmungseffekt der Gravitation untersucht. Für den Planeten Merkur ist die Antigravitation der Sonne um einen Faktor $3 \cdot 10^{-8}$ kleiner als ihre Gravitation. Der Artikel ist die Fortsetzung von [2].

***

Gravitation und Antigravitation in den metrischen Tensorkomponenten

Wir beziehen uns hier auf die Darstellung der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik, wie sie in [1] gegeben ist, d.h. in Kugelkoordinaten. Sie beschreibt das Bezugssystem des ruhenden und weit entfernten Beobachters, wobei sich die felderzeugende Masse, z.B. die Sonne, im Koordinatenursprung befindet.
Die Metrik hat dann die Form:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{e^{-\frac{2M}{r}}} + r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta) d\varphi^2\right) - e^{-\frac{2M}{r}} c^2 dt^2 \qquad (1),$$

mit

$$M = \frac{\gamma \cdot M_0}{c^2} \qquad (2).$$

In (2) ist γ die Newtonsche Gravitationskonstante, c die Vakuumlichtgeschwindigkeit und M_0 die Zentralmasse. Die Radius-Radius-Komponente des metrischen Tensors kann aus (1) abgelesen werden. Sie hat die Form:

$$g_{11} = \frac{1}{e^{-\frac{2M}{r}}} \qquad (3)$$

und zwischen ihr und der Zeit-Zeit-Komponente besteht die Beziehung

$$g_{11} \cdot g_{44} = -1 \qquad (4).$$

Da die Zentralmasse M_0 vermittels M nur in die Radius-Radius-Komponente und in die Zeit-Zeit-Komponente eingeht, wirkt allein in diesen Komponenten die Gravitation, bzw. die Antigravitation.
Im Unterschied zur Schwarzschild-Metrik, in der die Gravitation beliebig bis zur Zerstörung der Raum-Zeit anwachsen kann, herrscht in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik ein Regime der Selbstabschirmung der Gravitation. Bei der Untersuchung des quasi-klassischen Grenzfalls in [2] ist gezeigt worden, dass sich in dieser Näherung die Selbstregulation der Gravitation als Folge einer antigravitativen Wirkung des Gravitationspotentials darstellen lässt. Die Feldstärke der Gravitation ist im quasi-klassischen Grenzfall durch

$$\vec{G} = -\frac{Mc^2}{r^3} \cdot \vec{r} + \frac{2M}{r^3} |U| \cdot \vec{r} \qquad (5),$$

mit dem Potential

$$U = -\frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2} e^{-\frac{2M}{r}} \qquad (6)$$

gegeben (vergleiche mit [2]). Der erste Term in (5) ist die klassische Newtonsche Feldstärke des Gravitationsfeldes. Der zweite Term schwächt das Feld und wirkt in diesem Sinne antigravitativ. Dabei wird die Schwächung erst in sehr starken Feldern wirksam. Dann ist sie jedoch so effektiv, dass die Feldstärke für $r \to 0$ zum Nullvektor degeneriert. Weder das Potential (6) noch die Feldstärke (5) können über alle Schranken anwachsen. Physikalisch kommt darin der Bruch mit dem starken Äquivalenzprinzip zum Ausdruck, welches die strenge Proportionalität von aktiver und passiver Gravitationsmasse behauptet.
Wir untersuchen jetzt, wie sich die Antigravitation im exakten Fall der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik bemerkbar macht. Dazu ist es ausreichend, wenn wir nur eine der beiden relevanten Komponenten des metrischen Tensors betrachten und zunächst die Exponentialfunktion entwickeln:

$$g_{11} = \frac{1}{e^{-\frac{2M}{r}}} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!}\left(\frac{2M}{r}\right)^k} = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{2M}{r}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{2M}{r}\right)^3 \ldots} \qquad (7).$$

In der Beziehung (7) fallen sofort die alternierenden Vorzeichen auf. Brechen wir die Entwicklung der Reihe nach der ersten Potenz ab, so erhalten wir exakt die Schwarzschild-Lösung der Einstein'schen Allgemeinen Relativitätstheorie, in der

$$g_{11} = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \qquad (8)$$

ist. Aus dieser Betrachtung wird offensichtlich, dass die Gravitation durch den Term $-\frac{2M}{r}$ modelliert wird. Dem entsprechend müssen alle negativen Terme in (7) die Gravitation verstärken, während positive Terme, z.B. der Term $+\frac{1}{2}\left(\frac{2M}{r}\right)^2$, die Gravitation abschwächen, also antigravitativ wirken. Wenn wir das beachten, dann können wir alle gravitativen Terme und alle antigravitativen Terme in (7) sammeln und zusammenfassen. Dabei erkennen wir zunächst

$$g_{11} = \frac{1}{\Omega_A - \Omega_G}$$

$$\Omega_A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\left(\frac{2M}{r}\right)^{2k} \qquad (9).$$

$$\Omega_G = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)!}\left(\frac{2M}{r}\right)^{2k-1}$$

Der antigravitative Term Ω_A hat den Index A und der gravitative Term Ω_G den Index G bekommen, A für Antigravitation und G für Gravitation. Durch die beiden Reihen in (9) werden Hyperbelfunktionen definiert, so ist

$$\Omega_A = \cosh\left(\frac{2M}{r}\right) \qquad (10)$$

und

$$\Omega_G = \sinh\left(\frac{2M}{r}\right) \qquad (11).$$

Die Antigravitation kann durch die Cosinushyperbolikusfunktion und die Gravitation durch die Sinushyperbolikusfunktion beschrieben werden. Wir sehen hier den bekannten Zusammenhang, dass eine Exponentialfunktion als die Differenz

$$e^{-\frac{2M}{r}} = \cosh\left(\frac{2M}{r}\right) - \sinh\left(\frac{2M}{r}\right) \qquad (12)$$

geschrieben werden kann.
Für Vergleichszwecke führen wir noch die Schwarzschildsche Gravitationsfunktion ein und wir meinen damit den Ausdruck

$$\Omega_S = 1 - \frac{2M}{r} \qquad (13).$$

Der Mechanismus der Selbstabschirmung der Gravitation in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Wir stellen für unseren Zweck zunächst die Funktionen $\Omega_A, \Omega_G, \Omega_A - \Omega_G$ und Ω_S in der Nähe der Gravitationsradius $r_S = 2M$ grafisch dar.

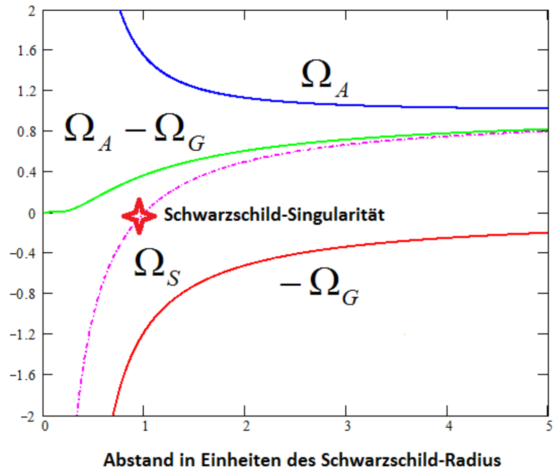

Abbildung 1: Die Grafik zeigt die Ω-Terme. Aus didaktischen Gründen ist der Term Ω_G (rote Linie)negativ genommen worden, um besser kenntlich zu machen, dass er der Gegenspieler zum antigravitativen Term Ω_A ist. Der Wert $\Omega_S = 0$ am Gravitationsradius $r_S = 2M$ bewirkt die Schwarzschild-Singularität in der Schwarzschild-Metrik und ist durch das Sternchen gekennzeichnet.

Wir erkennen zuerst, dass für große Abstände (im Vergleich zum Schwarzschild-Radius) sich Ω_S und $\Omega_A - \Omega_S$ praktisch nicht unterscheiden. Diese Beobachtung ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass die Schwarzschild-Metrik und die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik weit vom

Gravitationsradius entfernt nahezu identisch sind. Aus diesem Grunde genießt die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik die gleiche Evidenz im Planetensystem, wie die Schwarzschild-Metrik, die den Ruhm der Allgemeinen Relativitätstheorie maßgeblich begründet hat.

Ebenfalls für große Abstände ergänzen sich die Gravitation und die Antigravitation in der Weise, dass ihr Zusammenwirken im Resultat die Geometrie der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik bewirkt.

Die Stärke von Gravitation und Antigravitation ist mit Ausnahme von $r=0$ bei keinem Abstand symmetrisch. Interessanterweise dominiert im gesamten Bereich die Antigravitation. Das darf aber nicht so missverstanden werden, dass effektiv eine Abstoßung resultiert. Die hier verwendete Ausdrucksweise bezieht sich nur auf die von uns definierten Terme Ω_A und Ω_G. Aber aufgrund der Dominanz des antigravitativen Terms für $r>0$ ist stets die Differenz $\Omega_A-\Omega_K>0$. Es tritt dadurch am Schwarzschild-Radius bei der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik keine kaustische Singularität in Erscheinung. Das gewählte Koordinatensystem ist im gesamten Bereich definiert.

Erst an der Stelle $r=0$ entsteht, wegen $\Omega_A-\Omega_K=0$, eine kaustische Singularität. An dieser Singularität ist die Raum-Zeit selbst jedoch nicht singulär und darum beseitigt die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik vermittelt durch die antigravitativen Selbstabschirmung der Gravitation das Singularitätsproblem vollständig. Das wird insbesondere auch daran deutlich, dass für jeden Abstand eine Kreisbahn mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\dot{\varphi}=\sqrt{1+\frac{M}{r}}\cdot\sqrt{\frac{Mc^2}{r^3}} \qquad (14)$$

existiert. Eine Laue-Bedingung[1], welche die Existenz von Kreisbahnen einschränkt, wie das in der Allgemeinen Relativitätstheorie der Fall ist, existiert für die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik nicht.

Betrachten wir nun den Fall $M=0$ oder $r\to\infty$, dann ergibt sich $\Omega_A=1$ und $\Omega_G=0$. Die Dominanz des antigravitativen Terms ist physikalisch mit dem Grenzfall verknüpft, der den Minkowski-Raum realisiert. Diese Raum-Zeit ist gravitationsfrei. Die formale Definition der Antigravitation als Zusammenfassung aller positiven Terme in (7) widerspricht unserer üblichen Auffassung, wonach in einem Minkowski-Raum weder Gravitation noch Antigravitation auftritt. Für die weitere Betrachtung ist es daher sinnvoller, den Begriff der Antigravitation exakter zu definieren. In Einklang mit den physikalischen Phänomenen erreichen wir eine Definition der Antigravitation, wenn wir

$$\mathrm{P}_A=\Omega_A-1 \qquad (15)$$

als Antigravitation definieren. Mit dieser Definition können wir beobachten, wie sich die Antigravitation P_A im Vergleich zur Gravitation Ω_G aufbaut, wenn zu kleinen Radien übergegangen wird.

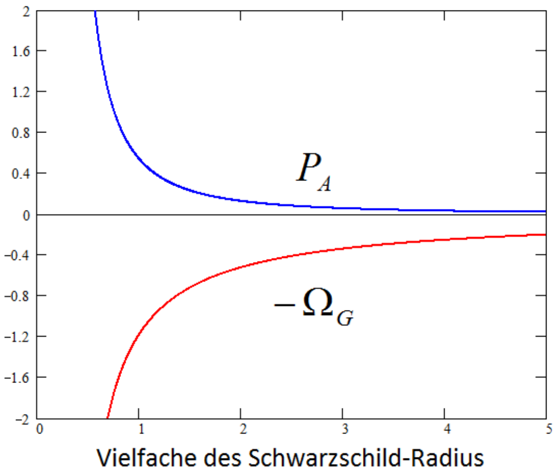

*Abbildung 2: Das Verhalten von Gravitation und Antigravitation ist **nicht** symmetrisch. Während anfänglich die Gravitation (**rot**) vom Betrag her dominiert, baut sich erst mit*

[1] Die Laue-Bedingung mit dem Energie-Parameter A lautet: $\frac{c^2}{r}(r-3M)\dot{t}^2=A^2$. sie besagt, dass unterhalb eines Radius $r\le 3M$ Kreisbahnen nicht mehr möglich sind. Sie steht in einem direkten Zusammenhang zur Theorie des Gravitationskollapses auf Basis der Allgemeinen Relativitätstheorie [3].

*zunehmender Gravitation die Antigravitation (**blau**) auf.*

Die Darstellung des Mechanismus der Selbstregulation der Gravitation kann auch dargestellt werden, indem man die Antigravitation P_A als Funktion der Gravitation Ω_G ausdrückt. Dazu setzen wir in die Beziehung (15) die Beziehung (10) ein und herhalten so

$$P_A = \cosh\left(\frac{2M}{r}\right) - 1 \qquad (16).$$

Auf Grund der Identität

$$\cosh\left(\frac{2M}{r}\right) = \sqrt{\sinh^2\left(\frac{2M}{r}\right) + 1} \qquad (17)$$

folgt für (16) durch Einsetzen von (17)

$$P_A = \sqrt{\sinh^2\left(\frac{2M}{r}\right) + 1} - 1 \qquad (18).$$

In der Beziehung identifizieren wir auf Grund von (11) Ω_G und finden so die gesuchte Abhängigkeit

$$P_A = \sqrt{\Omega_G^2 + 1} - 1 \qquad (19).$$

Wir erkennen sofort, dass die Antigravitation verschwindet, sowie die Gravitation verschwindet, denn aus $\Omega_G = 0$ ergibt sich unmittelbar $P_A = 0$. Für wachsende Werte von Ω_A nähern sich P_A und Ω_G asymptotisch bis zur vollständigen Gleichheit beider Größen, wenn $\Omega_G \to \infty$.

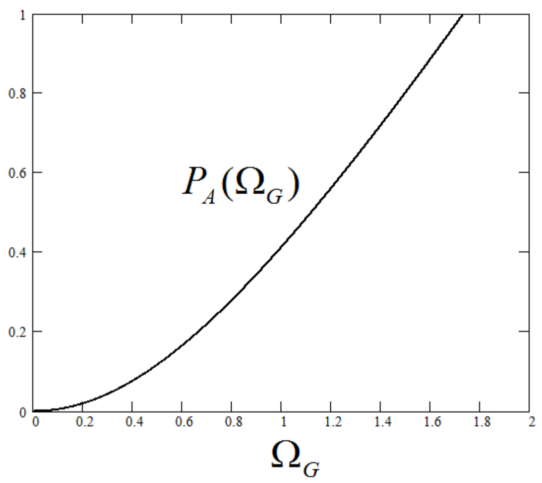

Abbildung 3: Die Antigravitation als Funktion des Gravitationsterms Ω_G (siehe Text).

In dem Augenblick divergiert die Radius-Radius-Komponente des metrischen Tensors offensichtlich:

$$g_{11} = \frac{1}{\sqrt{\Omega_G^2 + 1} - \Omega_G} \qquad (20),$$

was an der Stelle $r = 0$ der Fall ist, wie wir bereits wissen.

Die Dominanz der Gravitation gegenüber der Antigravitation in schwachen Feldern wird unmittelbar an der Reihenentwicklung (7) kenntlich. Vernachlässigt man in (7) Terme höherer Ordnung, dann kann für die Gravitation

$$\Omega_G = \frac{2M}{r} \qquad (21)$$

und für die Antigravitation

$$P_A = \frac{1}{2}\left(\frac{2M}{r}\right)^2 \qquad (22)$$

abgelesen werden. Um einen Eindruck von der Größenordnung zu bekommen, kann aus (21) und (22) das Verhältnis

$$\frac{P_A}{\Omega_G} = \frac{M}{r} \qquad (23)$$

gebildet werden. Im Perihel des Planeten Merkur ergibt sich für die Sonne dieses Verhältnis zu

$$\frac{P_A}{\Omega_G} = 3{,}21 \cdot 10^{-8} \qquad (24)[2].$$

In dieser Näherung stimmt (21) exakt mit der Allgemeinen Relativitätstheorie überein. Doch P_A ist ein reiner Post-Einstein-Schwarzschild-Effekt. Er existiert in der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht. Im Sonnensystem ist die Antigravitation offenbar 100-Millionenmal

[2] Dieser Rechnung lagen die folgenden Daten zugrunde:

$$r = 4{,}6 \cdot 10^{10} m$$

$$M_0 = 1{,}9884 \cdot 10^{30} kg$$

$$\gamma = 6{,}677 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

$$c = 2{,}99792458 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

Daten aus [1].

schwächer als die Gravitation. Es ist daher kein Wunder, wenn die Physik zu der Auffassung gekommen ist, dass die Gravitation eine nicht abschirmbare Kraft sei. Doch an dieser im Sonnensystem geringfügigen Abweichung entscheidet sich die Frage Urknall versus ewige Existenz des Kosmos.

Quellen

[1] K. Retzlaff, „Einstein- und Post-Einstein-Effekte im Zentralfeld“, epubli 2017, ISBN 978-3-1863-9
[2] K. Retzlaff, „Antigravitation im quasiklassischen Grenzfall“, Astronomische Gesellschaft Magdeburg e.V., 2017
[3] M. v. Laue, „Die Relativitätstheorie“, Band II, Braunschweig 1953