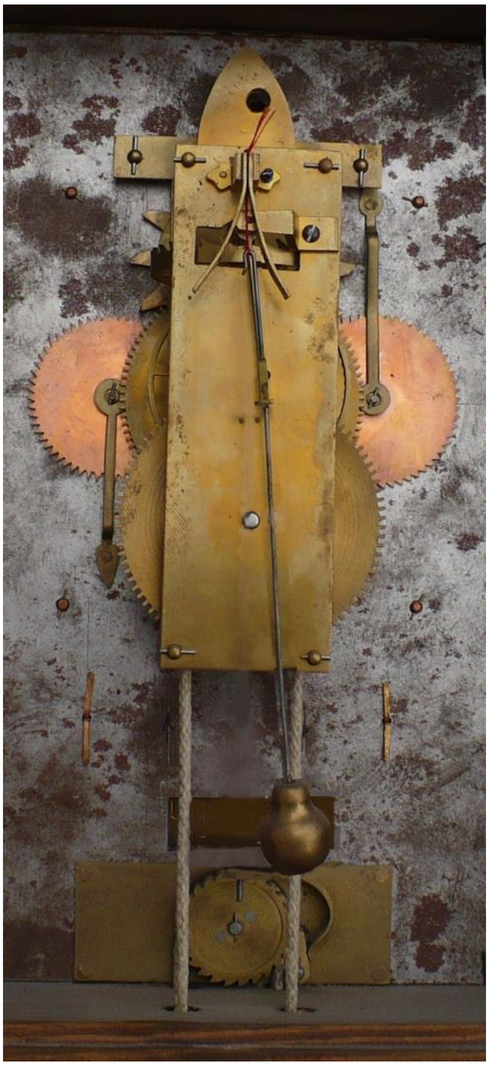
Was eine Pendeluhr mit Geo- und fundamentaler Gravitationsphysik verbindet

Klaus Retzlaff

Anlass für diese kleine physikalische Abhandlung ist die Bemerkung des Uhrmachermeisters, Joachim Hoppe, dass früher die Uhrmacher versuchten, durch Veränderung der Pendelmasse die Uhr zu eichen, aber dann waren sie darüber sehr verwundert, dass der Uhrengang nicht von der Pendelmasse, sondern von der Pendellänge abhängig war. Wie das kommt und was das mit fundamentaler Gravitationsphysik zu tun hat, darüber wird hier berichtet. Doch die Gleichungen geben Anlass für einen Blick darüber hinaus und lassen uns staunen ...

* * *

Zusammenfassung: Einerseits ist eine Pendeluhr ein simples Instrument zur Zeitmessung, auf der anderen Seite ist sie auch ein Gravimeter. Es wird nicht nur gezeigt, was fundamentale physikalische Prinzipien in der Pendeluhr für eine Rolle spielen, sondern, wie es gelingt, mittels einer Pendeluhr die Masse der Erde, die Fallbeschleunigung und schließlich sogar den Erdradius und damit die Mittlere Dichte der Erde zu messen.



Die faszinierende Pendeluhr Otto von Guerickes.

Die Pendeluhr beschreiben wir im Rahmen des Formalismus von Lagrange. In einem kartesischen Koordinatensystems, welches sich an der Oberfläche der Erde befindet, wo die x-Koordinatenachse eine Tangente zur Erdoberfläche im Abstand R vom Erdmittelpunkt bildet und die y-Achse die Höhe über dem Abstand R beschreibt, ergeben sich für die Position der Pendelmasse die Beziehungen:

$$\begin{aligned} x &= l \cdot \sin\alpha \\ y &= l \cdot (1-\cos\alpha) \end{aligned} . \qquad (1)$$

Dabei ist der Winkel α die Auslenkung des Pendels und l ist die Pendellänge.
Die Lagrange-Funktion ist die Differenz zwischen kinetischer Energie T und potentieller Energie U:

$$L = T - U \, . \qquad (2)$$

Gehen wir davon aus, dass die Pendellänge klein gegenüber dem Abstand zum Erdmittelpunkt ist, d.h., dass $l << R$ gilt, so kann das Gravitationsfeld im Bereich der Pendellänge als konstant angesehen werden. In diesem Bereich ist dann die zum Erdmittelpunkt gerichtete Fallbeschleunigung:

$$g = f \frac{M}{R^2} \, . \qquad (3)$$

Was eine Pendeluhr mit Geo- und fundamentaler Gravitationsphysik verbindet

Klaus Retzlaff

Die Größe f ist die Newtonsche Gravitationskonstante und M ist die aktive schwere Masse der Erde, welche das Erdgravitationsfeld erzeugt. Für die Lagrange-Funktion (2) ergibt sich durch Einsetzen der entsprechenden Ausdrücke:

$$L = m_T \frac{v^2}{2} - m_s \cdot g \cdot y \tag{4}$$

In der Beziehung (4) ist m_T die träge Pendelmasse, v^2 ist das Quadrat der Geschwindigkeit und m_s ist die passive schwere Pendelmasse.

Diese Begriffe, *träge Masse*, *passive schwere Masse* und *aktive schwere Masse*, sind für uns von Bedeutung. Die träge Masse ist jene, welche für den Widerstand gegen eine Änderung des Bewegungszustandes zuständig ist und die wir aus dem 2. Newtonschen Axiom

$$\vec{F} = m_T \cdot \vec{a} \tag{5}$$

kennen. Die passive schwere Masse bezeichnet die Eigenschaft eines Körpers, auf ein gegebenes Gravitationsfeld $\vec{g}$ zu reagieren:

$$\vec{F}_g = m_s \cdot \vec{g} \tag{6}$$

Die Beziehung (6) beschreibt die Gravitationskraft. Man mag anmerken, dass (5) und (6) beide das 2. Newtonsche Axiom repräsentieren, weil $\vec{g}$ die Fallbeschleunigung ist und dem zu Folge $m_T = m_s$ trivial gelten müsste, und diese Gleichheit kein fundamentales Prinzip sei. Doch man bedenke, dass die Kraft $\vec{F}_g$ bei einem im Gravitationsfeld ruhenden Objekt gemessen wird. Daher repräsentiert $\vec{g}$ das Gravitationsfeld und ist zugleich die Fallbeschleunigung für ein Teilchen, welches sich frei bewegen kann. Dieses frei bewegte Teilchen, „spürt“ aber gerade nicht die Kraft $\vec{F}_g$, weil diese Kraft exakt durch die Trägheitskraft $\vec{F}$ ausgeglichen wird. Dieser Ausgleich ist nicht trivial aber typisch für die Gravitation. In einem Coulomb-Feld verhält es sich nicht so. Schließlich ist die Größe $\vec{g}$ die Feldstärke der Gravitation:

$$\vec{g} = -f \frac{M}{R^3} \vec{R} \tag{7}$$

In (7) geht die *aktive schwere Masse*, also die Masse, die das Gravitationsfeld erzeugt, ein. (7) ist die vektorielle Schreibweise der Beziehung (3), wobei der Vektor $\vec{R}$ vom Massenmittelpunkt der Erdmasse M ausgeht. Wir sehen also hier, dass in der Newtonschen Physik Massen in ganz unterschiedlicher physikalischer Bedeutung vorkommen.

Für das Quadrat der Geschwindigkeit können wir unter Anwendung des Satzes von Pythagoras auch schreiben:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 . \tag{8}$$

Hier bedeuten die Punkte über den Buchstaben die zeitliche Ableitung, d.h.:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = v_x \\ \dot{y} &= \frac{dy}{dt} = v_y \end{aligned} \tag{9}$$

(9) gibt die x- und y-Komponente der Geschwindigkeit an.

Um die endgültige Form der Lagrange-Funktion zu finden, müssen wir also noch die Zeitableitung der Beziehung (1) bilden, um diese dann in (4) einzusetzen. Das wollen wir tun:

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{x} = l \cdot \cos\alpha \cdot \dot{\alpha} \\ v_y &= \dot{y} = l \cdot \sin\alpha \cdot \dot{\alpha} \end{aligned} \tag{10}$$

Nun setzen wir (1) und (10) in die Lagrange-Funktion (4) ein und erhalten so:

$$L = m_T \frac{1}{2}\left(l^2 \cdot \cos^2 \alpha \cdot \dot{\alpha}^2 + l^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \dot{\alpha}^2\right) -$$
$$- m_s \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \alpha)$$

umgeformt gibt das:

$$L = m_T \frac{1}{2} l^2 \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) -$$
$$- m_s \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \alpha)$$

und weil immer $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ gilt, folgt endgültig:

$$L = m_T \frac{l^2 \cdot \dot{\alpha}^2}{2} - m_s \cdot g \cdot l \cdot (1 - \cos \alpha) \quad (11)$$

Mit Ausnahme der Anfangsbedingungen enthält die Lagrange-Funktion (11) alle Informationen über die Pendelbewegung.
Aus der Lagrange-Funktion kann die Bewegungsgleichung abgeleitet werden. Die Bewegungsgleichung ist die so genannte Lagrange-Gleichung. Im Allgemeinen handelt es sich um ein System von Gleichungen, in unserem Fall reduziert sich das Problem auf eine einzige Differentialgleichung für den Winkel $\alpha(t)$.
Unsere Schreibweise „$\alpha(t)$“ verrät, dass wir das zeitliche Verhalten des Winkels beschreiben wollen, d.h. die Pendelbewegung.
Die Lagrange-Gleichung ist:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = 0. \qquad (12)$$

Wir müssen also die einzelnen Ableitungen bilden:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = m_T \cdot l^2 \cdot \dot{\alpha}$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} = m_T \cdot l^2 \cdot \ddot{\alpha} \qquad (13)$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = -m_s \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha \qquad (14)$$

Setzen wir (13) und (14) in (12) ein, dann ergibt sich:

$$m_T \cdot l^2 \cdot \ddot{\alpha} + m_s \cdot g \cdot l \cdot \sin \alpha = 0 \qquad (15)$$

Die Lösung dieser Differentialgleichung beschreibt das zeitlich Verhalten des Winkels $\alpha = \alpha(t)$.
Leider handelt es sich hierbei nicht um eine lineare Differentialgleichung und daher ist die Lösung schwierig. Aber für kleine Auslenkungen $\alpha \approx 0$ gilt: $\sin \alpha \approx \alpha$, und dann lautet die Differentialgleichung:

$$m_T \cdot l^2 \cdot \ddot{\alpha} + m_s \cdot g \cdot l \cdot \alpha = 0 \qquad (16)$$

Das ist eine lineare homogene Differentialgleichung 2. Ordnung und ihre Lösung stellt kein Problem dar.
Formen wir sie zunächst geringfügig um:

$$\ddot{\alpha} + \frac{m_s \cdot g}{m_T \cdot l}\alpha = 0 \qquad (17)$$

Dann erkennen wir, dass sie eine Sinusschwingung mit der Frequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{m_s \cdot g}{m_T \cdot l}} \qquad (18)$$

beschreibt, denn mit (18) wird (17) zu:

$$\ddot{\alpha} + \omega^2 \alpha = 0 \quad (19).$$

Betrachtet man nun (19), dann überzeugt man sich leicht, dass

$$\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega \cdot t) \quad (20)$$

eine Lösung von (19) darstellt, denn

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \alpha_0 \cdot \cos(\omega \cdot t) \cdot \omega \\ \ddot{\alpha} &= -\alpha_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \omega^2 \end{aligned}. \quad (21)$$

Setzt man (21) in (19) ein, ergibt sich:

$$-\alpha_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \omega^2 + \omega^2 \cdot \alpha_0 \cdot \sin(\omega \cdot t) \equiv 0 .$$

Die Lösung (20) beschreibt also tatsächlich das zeitliche Verhalten der Auslenkung und es handelt sich um eine Sinus-schwingung. Dabei ist α_0 die Amplitude.

Weil die Schwingungsdauer mit der Frequenz zusammenhängt, es gilt:

$$\tau = 2 \cdot \pi \frac{1}{\omega}, \quad (22)$$

folgt durch Einsetzen von (18) die Schwingungsdauer:

$$\tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m_T \cdot l}{m_s \cdot g}} . \quad (23)$$

Das ist die Gleichung, welche für unsere Diskussion von entscheidender Bedeutung ist und welche die Uhrmacherkunst des Baus von Pendeluhren in Beziehung zur Gravitationsphysik setzt.

Wir hatten ja gesehen, dass in der Newtonschen Physik Massen in ganz unterschiedlichen physikalischen Bedeutungen vorkommen. Diese Massen sind ganz unterschiedlich definiert und erfüllen entsprechend unterschiedliche physikalische Funktionen. In der Gleichung (23) kommen die Massen in allen diesen unterschiedlichen Funktionen gleichzeitig vor. Wir finden die *träge*, die *passive schwere* und die *aktive schwere Masse* in ihr. Dabei ist die aktive schwere Masse wegen (3), bzw. wegen (7) in g versteckt, d.h. $g = g(M)$.

Auf Grund ihrer unterschiedlichen Funktionen wäre die Annahme gerechtfertig, dass diese unterschiedlichen Massenarten nichts miteinander zu tun haben könnten und in unterschiedlichen Stoffen könnten die Massenarten in unterschiedlichen Verhältnissen vorkommen. Dann würden bei einer gegebenen schweren Masse m_s unterschiedliche Periodendauern für unterschiedliche Stoffe resultieren, je nachdem, wie viel träge Masse der Körper enthalten würde.

Wenn aber für alle Stoffe stets

$$m_s = m_T \quad (24)$$

gilt, dann kürzen sich die träge und die passive schwere Masse aus der Beziehung (23) unter allen Bedingungen heraus und es gilt:

$$\tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (25)$$

Unter der Bedingung (24) ist die Periodendauer der Pendelschwingung nicht von der Pendelmasse, sondern nur von der Pendellänge und der Stärke des Gravitationsfeldes abhängig. Im freien Fall oder bei einem verschwindenden Gravitationsfeld, bleibt die Pendeluhr stehen, denn für $g \to 0$ folgt $\tau \to \infty$.

Was also die Uhrmacher verwunderte, war die Gültigkeit des in (24) zum Ausdruck kommenden so genannten *schwachen Äquivalenzprinzips* von Trägheit und passiver Schwere. Dieses Prinzip ist der Grund dafür, dass unter Vakuumbedingungen alle Körper

unabhängig von ihrer Masse zu jedem Zeitpunkt gleich schnell fallen, wenn ihre Anfangsbedingungen identisch waren. Dieses Prinzip hat Einstein auf die Idee der Geometrisierung der Gravitation gebracht und es ist ein wichtiges Fundament der Gravitationsphysik heute – das konnten die verwunderten Uhrmacher zu ihrer Zeit allerdings noch nicht ahnen.
Da wir von der Gültigkeit des Äquivalenzprinzips überzeugt sind, können wir uns in den weiteren Betrachtungen auf die Beziehung (25) stützen. Weil wir die Periodendauer τ messen können und die Länge l des Pendels kennen, können wir eine Pendeluhr auch als Gravimeter verwenden. Dazu muss lediglich die Gleichung (25) nach g umgestellt werden:

$$g = 4 \cdot \pi^2 \frac{l}{\tau^2} \qquad (26)$$

und die Uhr relativ zur Gravitationsquelle ruhen. Mittels (26) ist es möglich, durch Messung der Periodendauer das Gravitationsfeld zu vermessen.
Kennen wir das Gravitationsfeld, die Gravitationskonstante und den Erdradius, dann können wir eine Pendeluhr auch prinzipiell zur Vermessung der Erdmasse verwenden. Dazu müssen wir lediglich (3) nach der Masse M umstellen:

$$M = \frac{R^2}{f} \cdot g \qquad (27)$$

Nach Einsetzen von (26) in (27) finden wir:

$$M = \frac{R^2}{f} \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot \frac{l}{\tau^2} \qquad (28)$$

- was man mit einer Pendeluhr so alles machen kann!

Aber man kann noch mehr, z.B. die Höhe des Magdeburger Doms bestimmen. Glaubt ihr nicht? Das ist ganz einfach! Nehmen wir an, wir haben am Fuße des Magdeburger Doms eine Fallbeschleunigung $g_0 = g(R)$ und auf der höchst möglichen Position im Dom die Fallbeschleunigung $g_h = g(R+h)$, wobei h den Höhenunterschied bezeichnet, dann bewirken die unterschiedlichen Fallbeschleunigungen einen Gangunterschied $\Delta\tau$, d.h., es gilt:

$$\Delta\tau = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{l} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{g_h}} - \frac{1}{\sqrt{g_0}} \right) \qquad (29)$$

Zur Herleitung dieser Beziehung haben wir (25) verwendet. Um nun die Höhe des Magdeburger Doms bestimmen zu können, müssen wir das Gravitationsgesetz verwenden:

$$\begin{aligned} g_0 &= f \frac{M}{R^2} \\ g_h &= f \frac{M}{(R+h)^2} \end{aligned} \qquad (30)$$

Die Beziehungen (30) setzen wir in (29) ein und formen nach der gesuchten Turmhöhe um, dann erhalten wir:

$$h = \sqrt{f \frac{M}{l} \frac{\Delta\tau}{2 \cdot \pi}} \,. \qquad (31)$$

Messen wir den Unterschied der Periodendauer $\Delta\tau$ der Schwingungen, dann können wir bei Kenntnis der Erdmasse die Höhe des Magdeburger Doms bestimmen, oder bei Kenntnis der Hohe die Erdmasse - ohne den Erdradius zu kennen!
Das liegt daran, dass sich bei der Herleitung der Beziehung (31) alle Terme wegheben, wo der Erdradius auftaucht und

dieser bemerkenswerte Umstand verschafft uns jetzt ganz neue Möglichkeiten. Statt (31) zu benutzen, um die Turmhöhe zu bestimmen, sollten wir (31) nach der Erdmasse umstellen, und die bekannte Turmhöhe benutzen, um Mittels der Pendeluhr die Masse der Erde auszurechnen:

$$M = \frac{l}{f}\left(\frac{2\cdot\pi\cdot h}{\Delta\tau}\right)^2 \qquad (32)$$

Wenn wir in dieser Form glücklich die Masse der Erde bestimmt haben, dann können wir (26) verwenden, um die Fallbeschleunigung am Fuße des Turms zu bestimmen. Denn kennen wir diese Fallbeschleunigung, dann müssen wir nur (3) nach dem Erdradius umstellen

$$R = \sqrt{f\frac{M}{g}} \qquad (33)$$

und finden so mit (33) für das Volumen der Erde:

$$V = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot R^3 = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot\left(f\frac{M}{g}\right)^{\frac{3}{2}}. \qquad (34)$$

Schließlich bekommen wir mittels (32) und (34) die mittlere Dichte der Erde heraus:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3\cdot l\cdot\pi\cdot h^2}{f^{\frac{5}{2}}\cdot\Delta\tau^2}\left(\frac{g}{M}\right)^{\frac{3}{2}}. \qquad (35)$$

Wenn wir nun in die Beziehung (35) für die Erdmasse erneut die Beziehung (32) einsetzen und für die Fallbeschleunigung die Beziehung (26) verwenden, dann erhalten wir für die mittlere Dichte der Erde die einfache Gleichung:

$$\rho = 3\cdot\pi\frac{1}{f}\frac{l}{h}\frac{\Delta\tau}{\tau^3}. \qquad (36)$$

Die Gleichung (36) besagt, dass für die Messung der mittleren Dichte der Erde oder irgendeines anderen Planeten mittels einer Pendeluhr allein die Kenntnisse der Gravitationskonstante, der Pendellänge und der Höhendifferenz der Messpunkte über dem mittleren Planetenradius nötig sind, wobei sich der untere Messpunkt etwa auf dem mittleren Planetenradius befinden muss.

Heilige Pendeluhr!

Projektidee: In einem evakuierten Behälter wird die Otto – von – Guericke - Uhr platziert. Mittels einer Laserlichtschranke wird über einen Monat der Takt der Uhr am Fuße vom Magdeburger Dom gemessen und gemittelt, die zweite Messung erfolgt an der höchst möglichen Stelle des Doms, erneut für die Dauer von einem Monat. Nach Bekantgabe der Ergebnisse, die zeigen sollen, was mit Ottos Uhr möglich ist, wird die Uhr offiziell an die Otto-von-Guericke-Gesellschaft übergeben. Ein Projekt mit doppeltem Otto – von – Guericke – Bezug.

Klaus Retzlaff, Cochstedt, 1.3.2013