Der Quantentod der Gravitationstheorie

Klaus Retzlaff

Zusammenfassung: Die Quantenmechanik ist die rätselhafteste Theorie unter allen physikalischen Theorien und zugleich ist sie das Fundament aller Physik. Sie hat makroskopische Bedeutung. Das belegt die Existenz der Atome, die sich zu Molekülen und Festkörpern verbinden. Die Quantenmechanik ist eben nicht nur die Grundlage der mikroskopischen Prozesse, sie bestimmt die Chemie und den menschlichen Alltag. Tatsächlich ist sie mehr als das. Sie ist der Totengräber unserer Vorstellungen über die Gravitation, weil sie deren zentrale Prinzipien zerstört: das Äquivalenzprinzip von Trägheit und Schwere sowie das Lokalitätsprinzip und das Kausalitätsprinzip. Wie die Quantenmechanik bezüglich des Äquivalenzprinzips die Allgemeine Relativitätstheorie (ART) zu Grabe trägt, ist Thema dieses Aufsatzes. Spätestens ab dieser Beweisführung darf niemand mehr erklären, die Allgemeine Relativitätstheorie sei bisher nicht widerlegt worden. Sie ist widerlegt und dieser Aufsatz ist die Widerlegung. Der Beweis ist zwingend, wer ihn ablehnt, müsste die Quantenmechanik ablehnen, aber das ist nicht möglich, denn das würde bedeuten, jene Gleichungen abzulehnen, die den Atombau erklären, es hieße, die Gravitationstheorie gegen die Quantenmechanik zu wenden. Aber die Gravitationstheorie kann die Quantentheorie nicht besiegen, weil die Gravitationstheorie die Atomspektren und die Chemie nicht erklären kann. Der Sieg ist eindeutig und die Niederlage ist endgültig.

***

Vorbemerkungen

Die Rechnungen und Darstellungen sind zum Teil ausführlicher, als für einen Fachmann notwendig, weil auch der Physikstudent oder der mathematisch-physikalisch interessierte Leser in der Lage sein muss, die Zusammenhänge zwischen Bewegungsgleichungen (Lagrange-Gleichungen), der Lagrange-Funktion und der Hamilton-Funktion zu kennen. Das liegt daran, dass sich das Äquivalenzprinzip am einfachsten an den Bewegungsgleichungen veranschaulichen lässt. Die Bewegungsgleichungen lassen sich aus der Lagrange-Funktion auf Basis des Prinzips der kleinsten Wirkung durch Variation gewinnen. Die Lagrange-Funktion steht aber in einer Beziehung zur so genannten Hamilton-Funktion und durch die Darstellung dieser Zusammenhänge wird gezeigt, dass die Hamilton-Funktion eine bestimmte Eigenschaft haben muss, damit das Äquivalenzprinzip gilt.

Die Hamilton-Funktion ist erforderlich, um die Beziehung zur Quantenmechanik herzustellen und zu zeigen, wie die Quantenmechanik die für die Realisierung des Äquivalenzprinzips notwendige mathematische Eigenschaft der Hamilton-Funktion naturgesetzlich untergräbt.

Ich habe den Versuch unternommen, den Beweis so darzustellen, dass elementare Kenntnisse der Differentialrechnung und Vektorrechnung ausreichen sollten, um den Beweis nachzuvollziehen. Gleichungen aus der Relativitätstheorie werden zwar angegeben, aber vom Leser wird nicht verlangt, mit diesen Gleichungen zu rechnen. Das ist für die Beweisführung auch nicht erforderlich, weil es ausreicht zu zeigen, wie die Quantenmechanik das Äquivalenzprinzip schon auf nichtrelativistischer Ebene bricht, so dass eine Theorie, die auf ihm im Sinne einer relativistischen Verallgemeinerung aufbaut, nur eine eingeschränkte und keinesfalls eine allgemeine Gültigkeit haben kann. Sie funktioniert nur so lange, wie die Quantenphysik ignoriert werden kann und dass bedeutet, dass sie zur Beschreibung des dichten Frühzustandes des Kosmos und für sehr große kosmische Volumina nicht mehr anwendbar sein kann. Das durch eine solche eingeschränkte Theorie implizierte raum-zeitliche Weltbild kann daher auch nicht die Wahrheit über Raum und Zeit sein.

Äquivalenzprinzipien und Gravitationstheorie

Die erste erfolgreiche Gravitationstheorie wurde durch Newton durch die Angabe des Kraftgesetztes formuliert:

$$\vec{F} = -f \frac{\vec{r}}{r} \frac{mM}{r^2} \qquad (1),$$

mit $\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ und $r = |\vec{r}|$.
Zusammen mit dem 2. Axiom

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (2)$$

ist (1) auch Bewegungsgleichung [1]. Betrachtet man zur Vereinfachung die Punkt-Masse $M >> m$ als die Quelle des Gravitationsfeldes, in dem sich die kleine Testmasse m bewegt, so folgt mit der Beschleunigung als $\vec{a} = \ddot{\vec{r}}$ die Bewegungsgleichung

$$m\ddot{\vec{r}} + f \frac{\vec{r}}{r} \frac{mM}{r^2} = 0 \qquad (3).$$

Formt man (3) leicht um, dann ergibt sich

$$m\ddot{\vec{r}} + mf \frac{\vec{r}}{r} \frac{M}{r^2} = 0 \qquad (4),$$

bzw.

$$m\ddot{\vec{r}} + m\vec{g} = 0 \qquad (5),$$

mit der Fallbeschleunigung

$$\vec{g} = f \frac{\vec{r}}{r} \frac{M}{r^2} \qquad (6).$$

Dabei ist r stets der positive Abstand der beiden Massenpunkte.

Bei einer genauen Betrachtung von (4) repräsentiert $\vec{g}$ das Gravitationsfeld, welches ein Beschleunigungsfeld ist, an das die Masse m mathematisch über das Produkt $m\vec{g}$ ankoppelt. Während die Masse m in (2) als Widerstandfaktor gegen Geschwindigkeitsänderungen erscheint, also als Trägheit fungiert, bringt sie in dem Produkt $m\vec{g}$ die Eigenschaft zum Ausdruck, ein gegebenes Gravitationsfeld zu „spüren“, d.h. sie fungiert als passive schwere Masse. In der Gleichung (1) steht die Masse m gleichberechtigt mit der Masse M, d.h. die Masse m kann ebenfalls als Quelle eines Gravitationsfeldes, welches auf M wirkt, entsprechend $f \frac{\vec{r}}{r} \frac{m}{r^2}$, angesehen werden.
Eine Masse kommt damit in drei Funktionen vor, als Trägheit, als passive schwere Masse und als aktive, d.h. ein Gravitationsfeld erzeugende Masse. Wir haben also eine doppelte Äquivalenz vorliegen:

$$m_{Trägheit} = m_{passiv} = m_{aktiv} \qquad (7).$$

Die Äquivalenz

$$m_{Trägheit} = m_{passiv} \qquad (8)$$

wird als *„Schwaches Äquivalenzprinzip“*, die Äquivalenz (7) als *„Starkes Äquivalenzprinzip“* oder einfach nur als ***„**Äquivalenzprinzip“* bezeichnet.

Das Äquivalenzprinzip bewirkt, dass im Gravitationsfeld alle Punktmassen, die sich allein unter dem Einfluss der Gravitation bewegen, gleich beschleunigt werden, bzw. bei gleichen Anfangsbedingungen unabhängig von ihrer Masse gleich schnell fallen. Dieses

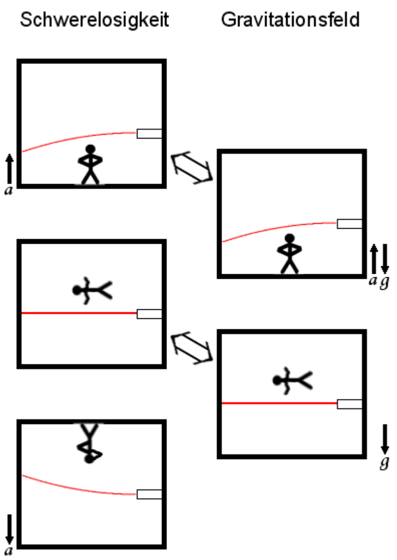
Phänomen kommt zustande, weil sich, bedingt durch das Äquivalenzprinzip, die träge und die passive schwere Masse aus der Bewegungsgleichung wegkürzen:

$\cancel{m}\ddot{\vec{r}} + \cancel{m}\vec{g} = 0$, so dass die Gleichung

$$\ddot{\vec{r}} + \vec{g} = 0 \qquad (9)$$

folgt.

Dieser Umstand, der keine Wahrheit über den freien Fall ist (wie wir noch sehen werden), hat Einstein zu seinen berühmten Überlegungen bewogen, wonach es unmöglich sei, in einem geschlossenen Raum (Fahrstuhl) zu entscheiden, ob man sich in einem Gravitationsfeld oder in einem beschleunigt bewegten Kasten befände, siehe folgendes Bild [2].



Bei der Entwicklung der Gravitationstheorie vollzog das Äquivalenzprinzip 5 aufeinander aufbauende Abstraktionsstufen (siehe [1], Seite 14):

1. Träge Masse gleich passive schwere Masse.
2. Punktteilchen, die nur unter dem Einfluss des Gravitationsfeldes stehen, bewegen sich auf Geodäten.
3. Es gilt die dynamische Gleichung[1]

$$T^{ik}{}_{;k} = T^{ik}{}_{,k} + \Gamma^{i}_{lk} T^{lk} + \Gamma^{k}_{lk} T^{il} = 0 \quad (10),$$

bzw. die Geodätengleichung

$$\frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} + \Gamma^{i}_{kl} \frac{dx^k}{d\lambda} \frac{dx^l}{d\lambda} = 0 \qquad (11).$$

4. Lokal gilt die spezielle Relativitätstheorie für alle nichtgravischen Felder, d.h. die Feldgleichungen sind im Gravitationsfeld so zu formulieren, dass in der kanonischen Form in der speziellen Relativitätstheorie, die Ableitungen durch allgemein kovariante Ableitungen zu ersetzen sind (auf die 4dimensionale Raum-Zeit angepasste Fassung des schwachen Äquivalenzprinzips).
5. Das Gravitationsfeld ist identisch mit der Metrik. Im frei fallenden Fahrstuhl verschwinden alle äußeren gravitativen Effekte (starkes Äquivalenzprinzip).

Das Äquivalenzprinzip ist daher zentral für unser heutiges Verständnis der Gravitation, denn die Allgemeine Relativitätstheorie ist die Konklusion aus den Erkenntnissen der Speziellen Relativitätstheorie und dem Äquivalenzprinzip. Diese Zusammenfassung der Prinzipien gipfelt in der allgemein-relativistischen Feldgleichung für die Gravitation:

$$R^{ik} - \frac{1}{2} g^{ik} R + \lambda g^{ik} = -\frac{8\pi f}{c^4} T^{ik} \qquad (12).$$

Wer (10) und (12) „scharf" anblickt, erkennt, den Zusammenhang zwischen Feld-Gleichung und dynamischer Gleichung in der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Gilt die einfache Gleichung (9) bereits im nichtrelativistischen Falle nicht in strenge, so

[1] Auf Grund Vierdimensionalität laufen hier die Indizes von 1 bis 4, wie es in der Allgemeinen Relativitätstheorie üblich ist.

bricht das ganze theoretische Gebäude der Allgemeinen Relativitätstheorie in sich zusammen, denn (9) ist der aller einfachste Fall kleiner Geschwindigkeiten $v << c$ und der Fall schwacher Gravitationsfelder. Es ist ja bis heute nicht klar, ob die Allgemeine Relativitätstheorie für sehr starke Felder gilt, aber in den schwachen Grenzfällen muss sie gelten. Gelingt es, eines Ihrer Prinzipien bereits in den schwachen Grenzfällen zu widerlegen, kann sie unter keinen Umständen als allgemein gültige Theorie der Gravitation überleben.

Äquivalenzprinzip, Lagrange-Formalismus und Hamilton-Funktion

Um der Theorie (der ART) den Todesstoß zu versetzen, vollziehen wir zur Vorbereitung zunächst die Herleitung von (3) über den Lagrange-Formalismus.

Die Lagrange-Funktion L steht in einer engen Beziehung zur so genannten Wirkungsfunktion S, und die Wirkung spielt – wir denken an das Wirkungsquantum – eine zentrale Rolle in der Quantenmechanik.

Die Wirkung S ist durch das Integral

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, \dot{x}_i, t)dt \qquad (13)$$

definiert. Die Lagrange-Funktion ist die Differenz von kinetischer und potentieller Energie:

$$L = T - U \qquad (14).$$

Auf Grund des sehr allgemeinen Prinzips der kleinsten Wirkung

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, \dot{x}_i, t)dt = 0 \qquad (15)$$

können der Lagrange-Funktion durch Variation gemäß (15) so gennannte Lagrange-Gleichungen zugeordnet werden. Die Lagrange-Gleichungen sind die so genannten Bewegungsgleichungen. Die Gleichung (9) ist ein Beispiel dafür. Ohne die Variations-rechnung hier vorzuführen (man findet die Rechnung in jedem entsprechenden Lehrbuch), folgen aus (15) die Lagrange-Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 \qquad (16).$$

Dabei laufen die Indizes von 1 bis 3 und sie nummerieren die Koordinaten durch.

Mit Hilfe von (16) kann man aus der Lagrange-Funktion die konkreten Bewegungsgleichungen berechnen. Das zeigen wir jetzt.

Für unseren Fall lautet die Lagrange-Funktion

$$L = \frac{m}{2} r^2 - U(r) \qquad (17),$$

mit

$$U(r) = m \cdot \frac{fM}{r} \qquad (18),$$

wobei wegen $m << M$ der Koordinaten-ursprung am Ort der Masse M liegen soll. Dieser Fall ist mit dem System Erde-Sonne vergleichbar und auch für ein Elektron-Proton-System, d.h. für ein Wasserstoffatom, kann diese Näherung verwendet werden, wenn von den elektrischen Kräften abgesehen wird. Man muss von den elektrischen Kräften absehen, denn die Gravitation ist im Vergleich zu den elektrischen Kräften im Wasserstoffatom so verschwindend klein, dass leider niemand diesen Fall bisher ernsthaft gerechnet hat, sonst wäre allerdings der Quantentod der Gravitationstheorie sofort aufgefallen!

Wir bestimmen nun die zu (17) zugehörigen Largrange-Gleichungen Schritt für Schritt. Die Koordinaten sind in unserem Falle als die üblichen kartesischen Koordinaten[2] gewählt. Wir bestimmen zunächst die $\frac{\partial L}{\partial x_i}$, wobei bei der konkreten Rechnung $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ zu beachten ist. Dann finden wir:

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = -m \frac{fM}{r^3} x_i \qquad (19).$$

Weiter bilden wir die $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$ und finden nach Rechnung:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = -m\dot{x}_i \qquad (20),$$

und schließlich müssen wir (20) nach der Zeit ableiten, d.h., wir müssen die $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}$ ausrechnen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = -m\ddot{x}_i \qquad (21).$$

Diese Ergebnisse benötigen wir, wie gesagt, um (16) für unseren konkreten Fall zu finden:

$$m\ddot{x}_i + m\frac{fM}{r^3} x_i = 0 \qquad (22).$$

Der Term $m\frac{fM}{r^3} x_i$ ist aber nichts anderes als die vektorielle Komponente der Fallbeschleunigung $\vec{g}$. Wenn wir die Lagrange-Gleichungen (22) in Vektorschreibweise formulieren, ergibt sich:

$$m\ddot{\vec{x}} + m\vec{g} = 0 \qquad (23),$$

und das ist einfach die Gleichung (5), bzw. die Gleichung (9), wenn wir die Masse in (5) wieder wegkürzen.

Das war es, was zunächst gezeigt werden sollte, dass die Lagrange-Gleichungen (17), auf die uns bekannten Bewegungsgleichungen (9) führen, welche das Äquivalenzprinzip zum Ausdruck bringen, und die identisch mit (3) sind.

Die Lagrange-Funktion (17) ist uns wichtig, weil die Lagrange-Funktion über

$$H = 2T - L = T + U \qquad (24)$$

in Beziehung zur Hamilton-Funktion steht, und die Hamilton-Funktion wird für den Vergleich mit der Quantenmechanik benötigt – ziemlich verwirrend, diese vielen komischen Funktionen, aber da müssen wir durch.

Die Hamilton-Funktion ist einfach die Summe aus kinetischer und potentieller Energie und mit (24) ist unsere konkrete Hamilton-Funktion einfach:

$$H = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - m\frac{fM}{r} \qquad (25).$$

Wir sehen hier sofort, dass (25) komplett proportional zur trägen Masse m ist, denn wir könnten durch Ausklammern einfach auch

$$H = m\left(\frac{1}{2}\dot{\vec{r}}^2 - \frac{fM}{r}\right) \qquad (26)$$

scheiben.

Dieser Tatbestand ist darum wichtig, weil nur aus diesem Grund die Gleichung (9) keinen Trägheitsfaktor m enthält. Nur, wenn (9) gilt, gilt auch die Aussage: Im Gravitationsfeld ist die Beschleunigung eines Punktteilchens unabhängig von seiner Masse. Genau das ist die Folge des Äquivalenzprinzips.

Noch anders ausgedrückt kann man sagen, das Äquivalenzprinzip findet seinen Ausdruck

[2] Für dieses Problem sind eigentlich Kugelkoordinaten üblich, wir wollen aber berücksichtigen, dass es für den interessierten Nichtstudenten, der versuchsweise die Rechnungen nachvollziehen möchte, schon schwer genug ist, darum bleiben wir bei den aus der Schule bekannten kartesischen Koordinaten.

darin, dass die Hamilton-Funktion für ein sich im Gravitationsfeld bewegendes Teilchen proportional zu seiner trägen Masse ist, d.h., $H \propto m$. Noch anders ausgedrückt, die Bewegung eines Körpers hängt genau dann nicht von seiner trägen Masse ab, wenn $H \propto m$ gilt. Ich umschreibe das so oft wiederholend, weil das der zentrale Anlass für Einsteins Überlegungen über den Zusammenhang zwischen Gravitation und Beschleunigung, bzw. über den Zusammenhang zwischen Gravitation und der Raum-Zeit war. Das ist ja der Ausgangspunkt für das Gedankenexperiment mit dem Fahrstuhl, darum noch einmal eingerahmt, damit keiner diesen wichtigen Punkt überliest, es muss im klassischen Fall

$$\boxed{H \propto m} \qquad (27),$$

gelten, damit die Einstein'sche Gravitationstheorie, d.h. die Allgemeine Relativitätstheorie, durchführbar ist!

Gibt es einen naturgesetzlichen, d.h. einen prinzipiellen Grund, der die strenge Gültigkeit von (27) verhindert, muss die ART nur noch als Näherung einer allgemeinen und noch nicht entwickelten Gravitationstheorie angesehen werden – ähnlich, wie die Newtonsche Mechanik immer eine gute Theorie ist, so lange die Geschwindigkeiten klein im Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit sind, aber allgemein gültig ist die Newtonsche Gravitationstheorie eben nicht. Sie ist eine Näherung, welche z.B. einen Teil der Periheldrehung des Planeten Merkur, bzw. die Lichtablenkung im Schwerefeld der Sonne nicht richtig beschreiben kann.

Die Schrödinger-Gleichung und der klassische Grenzfall der Quantenmechanik

Die folgende Rechnung ist ein schönes Übungs- und Lehrbuchbespiel, wie gezeigt werden kann, dass die Quantenmechanik für $\hbar \to 0$ in die klassische Mechanik übergeht.

Ich habe hier zunächst nur ausführlicher vorgerechnet, was Lifschitz und Landau im Band III, Lehrbuch der Theoretischen Physik, auf Seite 49 und 50 grob vorgerechnet haben [3].

Mit der Amplitude $a = a(\vec{r}, t)$ und der Wirkung $S = S(\vec{r}, t)$ wählen wir den allgemeinen Ansatz für die Wellenfunktion:

$$\psi = a e^{i\frac{S}{\hbar}} \qquad (28).$$

Die Schrödinger-Gleichung lautet:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2}\psi + U\psi \qquad (29),$$

mit $U = U(\vec{r})$.

Es ist für unsere Rechnung und Beweisführung gar nicht notwendig, ein konkretes Potential vorzugeben. Das Ergebnis spricht Bände – hätte man nur einmal an die Gravitation gedacht!

Gehen wir mit (28) in die Schrödinger Gleichung (29) ein, so müssen wir zunächst die folgenden Ableitungen berechnen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi = \frac{\partial a}{\partial t} e^{i\frac{S}{\hbar}} + a\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{i\frac{S}{\hbar}}\right) \qquad (30)$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2}\psi = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(\frac{\partial a}{\partial \vec{r}} e^{i\frac{S}{\hbar}} + a\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(e^{i\frac{S}{\hbar}}\right)\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 a}{\partial \vec{r}^2} e^{i\frac{S}{\hbar}} + \frac{\partial a}{\partial \vec{r}}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(e^{i\frac{S}{\hbar}}\right) +$$

$$+ \frac{\partial a}{\partial \vec{r}}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(e^{i\frac{S}{\hbar}}\right) + a\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2}\left(e^{i\frac{S}{\hbar}}\right). \qquad (31)$$

Wir finden als Erstes:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{i\frac{S}{\hbar}}\right) = \frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial t} e^{i\frac{S}{\hbar}} \qquad (32),$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(e^{i\frac{S}{\hbar}}\right)=\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}e^{i\frac{S}{\hbar}} \qquad (33)$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2}\left(e^{i\frac{S}{\hbar}}\right)=\frac{i}{\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial \vec{r}^2}e^{i\frac{S}{\hbar}}+\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}\frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left(e^{i\frac{S}{\hbar}}\right)=$$

$$=\frac{i}{\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial \vec{r}^2}e^{i\frac{S}{\hbar}}+\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}e^{i\frac{S}{t}}=$$

$$=\frac{i}{\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial \vec{r}^2}e^{i\frac{S}{\hbar}}-\frac{1}{\hbar^2}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}e^{i\frac{S}{t}} \qquad (34).$$

Nun setzen wir (32) in (30) ein, und finden:

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi=\frac{\partial a}{\partial t}e^{i\frac{S}{\hbar}}+a\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial t}e^{i\frac{S}{\hbar}} \qquad (35),$$

weiter setzen wir (33) und (34) in (31) ein, dann erhalten wir:

$$\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^2}\psi=\frac{\partial^2 a}{\partial \vec{r}^2}e^{i\frac{S}{\hbar}}+2\frac{\partial a}{\partial \vec{r}}\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}e^{i\frac{S}{\hbar}}+$$

$$+a\frac{i}{\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial \vec{r}^2}e^{i\frac{S}{\hbar}}-\frac{a}{\hbar^2}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}e^{i\frac{S}{t}} \qquad (36).$$

Setzen wir schließlich noch diese Zwischenergebnisse in die Schrödinger Gleichung (29) ein, dann erhalten wir:

$$i\hbar\frac{\partial a}{\partial t}e^{i\frac{S}{\hbar}}+i\hbar a\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial t}e^{i\frac{S}{\hbar}}=$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 a}{\partial \vec{r}^2}e^{i\frac{S}{\hbar}}-\frac{\hbar^2}{2m}2\frac{\partial a}{\partial \vec{r}}\frac{i}{\hbar}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}e^{i\frac{S}{\hbar}}-$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}a\frac{i}{\hbar}\frac{\partial^2 S}{\partial \vec{r}^2}e^{i\frac{S}{\hbar}}+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{a}{\hbar^2}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}e^{i\frac{S}{t}}+$$

$$+Uae^{i\frac{S}{\hbar}} \qquad (37).$$

Nach einfachen Umformungen, wie Kürzen, Ausklammern und Ausmultiplizieren der imaginären Einheit i (d.h. $i^2=-1$) in den entsprechenden Termen, verändert sich (37) zur Gleichung:

$$i\hbar\frac{\partial a}{\partial t}-a\frac{\partial S}{\partial t}=$$

$$=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 a}{\partial \vec{r}^2}-i\frac{\hbar}{m}\frac{\partial a}{\partial \vec{r}}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}-$$

$$-ia\frac{\hbar}{2m}\frac{\partial^2 S}{\partial \vec{r}^2}+\frac{a}{2m}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}+$$

$$+Ua \qquad (38),$$

wobei sich der Faktor $e^{i\frac{S}{t}}$ weggehoben hat. Imaginärteil und Realteil führen auf die zwei verkoppelten Gleichungen

$$\frac{\partial a}{\partial t}+\frac{1}{m}\frac{\partial a}{\partial \vec{r}}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}+\frac{a}{2m}\frac{\partial^2 S}{\partial \vec{r}^2}=0 \qquad (39)$$

und

$$a\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{a}{2m}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}+Ua-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 a}{\partial \vec{r}^2}=0 \quad (40).$$

Die Division von (40) durch a führt auf

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{2m}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}+U-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial \vec{r}^2}=0 \quad (41).$$

Mit Ausnahme des Terms mit $\hbar^2$, ist (41) die klassische Hamilton-Jacobi-Gleichung, denn $\vec{p}=\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}$ ist der kanonische Impuls, der entsprechende Term in (41) repräsentiert die kinetische Energie des Systems.

Die Quantenphysik kommt über den $\hbar^2$-Term in die Welt und dieser Term ist bei sonst gleichen Bedingungen umso dominanter, je kleiner die träge Masse m ist. Dieses Ergebnis ist völlig unabhängig vom konkreten Potential U. Es gilt in allen Zusammenhängen und damit gilt es auch für den Fall, dass U das Gravitationspotential ist.

Die Hamilton-Jacobi-Gleichung hat die Form

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t) = 0 \qquad (42).$$

Aus dem Vergleich von (41) und (42) entnehmen wir, dass gem. (42) die quantenmechanische Hamilton-Funktion lautet:

$$H = \frac{1}{2m}\vec{p}\cdot\vec{p} + U - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial \vec{r}^{\,2}} \qquad (43).$$

Die klassische Hamilton-Funktion ist für $\hbar \to 0$ gleich

$$H_{klassisch} = \frac{1}{2m}\vec{p}\cdot\vec{p} + U \qquad (44),$$

nur um das zu erwähnen, weil wir ja den Grenzübergang angesprochen hatten.

Die Gleichung (43) ist, zusammen mit (39) und der bisher nicht erwähnten Normierungs-bedingung

$$1 = \int_V \psi\psi^* dV \qquad (45)$$

immer noch exakte Quantenmechanik im Sinne der Schrödinger Gleichung. Aber in der Form hat man keine Wellenfunktion vor sich, sondern gekoppelte Differentialgleichungen und eine Zusatzbedingung (45). Für den klassischen Grenzfall verlieren die Gleichungen (45) und (39) ihre Bedeutung.

Für unsere Beweisführung liefert aber die Gleichung (43) das schlagende Argument. Doch bevor wir das genau ausführen, formen wir (43) noch etwas um und setzen zugleich das Newtonsche Gravitationspotential gemäß (18) ein. Dabei ersetzen wir auch den Impuls $\vec{p} = m\vec{v} = m\dot{\vec{r}}$ und erhalten

$$H = \frac{m}{2}\dot{r}^2 - m\frac{fM}{r} - \frac{1}{m}\frac{\hbar^2}{2}\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial \vec{r}^{\,2}} \qquad (46).$$

Wir erkennen hier die Struktur aus (26) wieder,

$$H = m\left(\frac{1}{2}\dot{r}^2 - \frac{fM}{r}\right) + Q \qquad (47),$$

aber zugleich existiert der Zusatzterm

$$Q = -\frac{1}{m}\frac{\hbar^2}{2}\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial \vec{r}^{\,2}} \qquad (48),$$

den ich als Quanten-Term bezeichnen möchte. Da der Quantenterm, wie noch zu zeigen ist, nicht proportional zur trägen Masse m sein kann, verletzt die Gleichung (47) die Bedingung (27), über deren Bedeutung bereits alles gesagt wurde.

Der Quantenterm kann noch weiter strukturiert werden

$$Q = -\frac{1}{m}P \qquad (49),$$

mit der im Folgenden als Planck-Faktor bezeichneten Größe:

$$P = \frac{\hbar^2}{2}\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial \vec{r}^{\,2}} \qquad (50).$$

Der Planck-Faktor müsste proportional zum Quadrat der trägen Masse m sein, d.h. es müsste $P \propto m^2$ gelten, damit die Bedingung (27) erfüllt ist.

Wir haben also zu untersuchen, wie und ob überhaupt der Planck-Faktor von der Masse m abhängig ist. Zunächst zeigt die Dimensionsanalyse

$$[Q] = \frac{kgm^2}{s^2} = \frac{1}{kg}\frac{kg^2m^4s^2}{s^4}\left[\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial \vec{r}^{\,2}}\right] \qquad (51),$$

dass

$$\left[\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial \vec{r}^{\,2}}\right] = \frac{1}{m^2} \qquad (52)$$

die Dimension des Kehrwerts einer Fläche hat, was nicht verwundern muss, denn wir sehen ja die 2. Ableitung $\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^{\,2}}$ in dem Ausdruck und, dass sich die Einheiten von a wegen des Faktors $\frac{1}{a}$ wegkürzen müssen.

Erinnern wir uns noch daran, dass a wegen (28) die Amplitude der Wellenfunktion ψ ist, so wird klar, dass a dimensionslos ist.

Auf Grund der Normierung (45) ist a^2 die Wahrscheinlichkeit das Teilchen mit der Masse m zu einem bestimmten Zeitpunkt an einem bestimmten Ort zu finden. Darum kann der Planckfaktor nicht proportional zur Masse m sein.

Wir wollen nun noch die Gleichung (39) untersuchen, die mit der Gleichung (41), bzw. (47) verkoppelt ist, um ihre Bedeutung zu verstehen.

Dazu ist es sinnvoll, diese etwas umzuformen, und das setzt zunächst eine kleine Nebenrechnung voraus, um die Idee für die Umformung verständlich zu machen.

Nebenrechnung: Betrachten wir die Divergenz eines beliebigen Vektors $\vec{V}(x_1, x_2, x_3)$, so ist die Divergenz durch den Ausdruck

$$div(\vec{V}) = \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \bullet \vec{V} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V_i}{\partial x_i} \qquad (52)$$

definiert, d.h. der Vektor wird skalar mit dem so genannten Nabla-Operator $\nabla = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$ multipliziert (Skalarprodukt: $\bullet$). Die Divergenz eines Produktes aus einem skalaren Faktor $\alpha(x_1, x_2, x_3)$ und einem Vektor $\vec{V}(x_1, x_2, x_3)$ berechnet sich folgendermaßen:

$$div(\alpha\vec{V}) = \frac{\partial \alpha}{\partial \vec{r}} \bullet \vec{V} + \alpha \cdot div(\vec{V}) \qquad (53).$$

Betrachten wir nun die Gleichung (39) etwas genauer, konkret den 2. und den 3. Term, dann erkennen wir auf Grund der Nebenrechnung die Möglichkeit, die Gleichung (39) kompakter aufzuschreiben, wenn wir nämlich den Vektor aus der Nebenrechnung $\vec{V} = \frac{\partial S}{\partial \vec{r}}$ und den Faktor $\alpha = a^2$ setzen:

$$div(\alpha\vec{V}) = \frac{\partial \alpha}{\partial \vec{r}} \bullet \vec{V} + \alpha \cdot div(\vec{V}) =$$

$$div\left(a^2 \frac{\partial S}{\partial \vec{r}}\right) = \frac{\partial a^2}{\partial \vec{r}} \bullet \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} + a^2 \cdot div\left(\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}\right) =$$

$$= 2a \frac{\partial a}{\partial \vec{r}} \bullet \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} + a^2 \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial \vec{r}^{\,2}} \qquad (54).$$

Multiplizieren wir (39) mit $2a$, dann folgt:

$$2a \frac{\partial a}{\partial t} + \frac{2a}{m} \frac{\partial a}{\partial \vec{r}} \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} + \frac{a^2}{m} \frac{\partial^2 S}{\partial \vec{r}^{\,2}} = 0 \qquad (55).$$

Wir erkennen dann:

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{1}{m}\left(2a \frac{\partial a}{\partial \vec{r}} \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial^2 S}{\partial \vec{r}}\right) = 0 \qquad (56)$$

Und darin identifizieren wir das Resultat (54), was uns veranlasst,

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + \frac{1}{m} div\left(a^2 \frac{\partial S}{\partial \vec{r}}\right) =$$

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + div\left(a^2 \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial \vec{r}}\right) = 0 \qquad (57)$$

zu schreiben. Die Gleichung (57) hat nun eine anschauliche physikalische Bedeutung. Wir wissen ja schon, dass $a^2(x_1, x_2, x_3)$ die Wahrscheinlichkeit ist, das Teilchen an dem Punkt $P(x_1, x_2, x_3, t)$ zum Zeitpunkt t zu finden. Die Größe $\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}} = \frac{\vec{p}}{m} = \vec{v}$ ist die klassische Geschwindigkeit des Teilchens. Aus diesem Grund ist die Gleichung (57) die Kontinuitätsgleichung. Sie besagt, dass sich die Wahrscheinlichkeitsdichte, das Teilchen an einem bestimmten Ort anzutreffen, nach den Gesetzten der klassischen Mechanik mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ im Raum verschiebt [3].

Damit wird ausgesagt, dass sich nicht das Teilchen selbst gemäß dem Gravitationsgesetz und dem Äquivalenzprinzip bewegt, sondern dass an die Stelle der Teilchenbewegung die Bewegung der Wahrscheinlichkeitsdichte getreten ist. Auch das ist eine Form der Aussage, dass die Gravitationstheorie die Bewegung des Teilchens in dem Maße nicht mehr beschreibt, wie die Quanteneigenschaften eine Rolle spielen, und darum sind grundlegende Schlussfolgerungen in Bezug auf die Metrik, beziehungsweise auf die Raum-Zeit-Struktur, bzw. über das Lokalitäts- und Kausalitätsprinzip der Allgemeinen Relativitätstheorie zu ziehen, welches ihr innewohnt.

Die Kontinuitätsgleichung besagt eben auch, dass das Teilchen nicht aus der Welt ist, der Übergang zur Bewegung der Wahrscheinlichkeitsdichte heißt aber, dass es sich nicht gemäß der Raum-Zeit-Metrik bewegt, was im Gegensatz zur ART steht, denn nach der ART bestimmt die Materie die Geometrie bis auf Grenz- und Anfangsbedingungen, während die Geometrie „sagt“, wie sich die Materie unter den gegebenen Bedingungen zu bewegen hat. In ihr ist das Geschehen zu jedem Zeitpunkt und an jedem Ort vollständig deterministisch.

Die Metrik definiert die Kausalstruktur der Welt, und der Satz, dass das Teilchen einerseits in der Welt ist, andererseits die Kausalstruktur das Verhalten des Teilchens nur noch statistisch bestimmt, besagt auch, dass das Teilchen nicht mehr in Strenge dem Lokalitäts- und Kausalitätsprinzip folgt.

Das heißt, dass die Reduktion des Realitätsbegriffes auf die Raum-Zeit-Struktur, wie sie in der klassischen Physik und insbesondere in der Relativitätstheorie verstanden wird, zu eng gefasst ist. Nach der Allgemeinen Relativitätstheorie spielt sich alles physikalische Geschehen in der 4-dimensionalen Raum-Zeit ab, die Quantenmechanik belehrt uns, dass dem nicht so ist. Die zentralen Kategorien der klassischen Physik, die in der Allgemeinen Relativitätstheorie gipfelt, sind der Begriff der Masse/Energie/Impuls einerseits und die Begriffe Raum und Zeit andererseits. Betrachtet man die Hamilton-Funktion (48) unter dem Gesichtspunkt der Aufteilung ihrer Terme in klassisch-physikalische (k) und quanten-physikalische (q) speziell unter der Rolle der Masse, so hat die Hamilton-Funktion die Struktur (eingerahmt!):

$$\boxed{H = m \cdot k + \frac{1}{m} q} \qquad (58).$$

Man sieht hier unmittelbar, dass ein und dieselbe Ursache, nämlich die Masse, bestimmend für das jeweils dominierende physikalische Regime ist. Die klassische Physik ist für große Massen dominierend, große Massen unterdrücken den Quantenterm, dem gegenüber werden die a-kausalen und nicht lokalen Elemente der Quantenwelt umso dominanter, je kleiner die Massen sind. Die Beziehung (58) zeigt geradezu an, in welchem Maße die klassischen Beziehungen ihre Bedeutung verlieren.

Weil die Allgemeine Relativitätstheorie aller Physik den kausalen Rahmen beansprucht zu verleihen, weil in ihr der Begriff der Masse auf das engste mit dem Raum-Zeit-Begriff verknüpft ist, sie aber gerade nur die klassische Seite der Physik abzubilden vermag, bleibt ihr die strenge Gültigkeit, d.h. die Allgemeingültigkeit versagt. Sie scheitert an den Quanten!

Quellen

[1] H.-J. Treder, Gravitationstheorie und Äquivalenzprinzip, Akademie-Verlag-Berlin 1971

[2] Von Ben-Oni - selbst erstellt, Bild-frei, https://de.wikipedia.org/w/index.php?curid=2031897

[3] Landau, Lifschitz, Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band III, Akademie – Verlag Berlin 1978