Quantenmechanik und geodätische Bewegung

- eine mathematische-physikalische Entdeckungsreise -

Klaus Retzlaff

Zusammenfassung: Die Untersuchung ist mathematischer Natur und ein Abenteuer, denn der Autor kennt zum Beginn der Niederschrift das Resultat selber nicht. Der Leser begleitet ihn also auf seiner Entdeckungsreise. Der Einstieg beginnt mit dem einfachsten Fall der Bewegung eines freien Teilchens im Rahmen der Newtonschen Mechanik und es soll die Beziehung zur Quantenmechanik (Schrödinger Gleichung) untersucht werden. Dabei sind allerdings die mathematischen Beziehungen von Interesse, wie sie sich in kovarianter Schreibweise der Gleichungen darstellen, da so auch die Beziehungen zur relativistischen Physik deutlich werden. Es geht also um eine Analyse der Beziehungen der Quantenmechanik zur Raum-Zeit-Struktur auf der elementarsten Ebene. Lassen wir uns gemeinsam überraschen, wohin die Reise führen wird, und ob sie überhaupt ein Ziel erreicht. Eines wird auf jeden Fall erreicht, wir lernen etwas über die mathematische Sprache der Allgemeinen Relativitätstheorie, die Spitzfindigkeiten der Quantenmechanik über Bohmsche Quantentheorie und – sonst hätte ich den Artikel nicht veröffentlicht – etwas über die tiefen Beziehungen zwischen Quanten und Gravitation. Wie stets werden die Rechnungen sehr ausführlich dargestellt, damit interessierten Lesern und Studenten das Nachrechnen ermöglicht wird. Insbesondere wird dabei auch von der mathematischen Sprache der Allgemeinen Relativitätstheorie Gebrauch gemacht, wobei die Kleinschrittigkeit der Rechnungen dem Leser mögliche Hemmungen vor ihrem Gerbrauch nehmen soll. Es wäre aber gut, ein etwas älteres Lehrbuch über Tensoralgebra und Tensoranalysis zur Hand zu haben.

***

Die Bewegung eines freien Teilchens in tensorieller Darstellung

Wir studieren zunächst den klassischen 3-dimensionalen Fall der Bewegung eines Teilchens, wobei wir die geometrische Darstellung der Riemannschen Geometrie wählen. Im zweiten Schritt untersuchen wir unter Bezugnahme auf [1], wie sich in dieser Darstellungsweise die Quantenmechanik mathematisch auswirkt, um daraus grundsätzliche Schlussfolgerungen zu ziehen.

Die Bewegung eines freien Teilchens wird durch seine kinetische Energie und die Struktur des Raumes bestimmt,

$$T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k \qquad (1),$$

wobei in der klassischen Physik die Zeit eine absolute universelle Größe ist. In der Beziehung (1), sowie im Folgenden gilt die Einstein'sche Summationskonvention[1]. Die Größe g_{ik} repräsentiert die kovarianten Komponenten des metrischen Tensors, der die Geometrie des Raumes, bzw. in der Relativitätstheorie die Geometrie der Raum-Zeit mathematisch kodiert.

Wir bilden zunächst die Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^l} - \frac{\partial L}{\partial x^l} = 0 \qquad (2).$$

Das sind die Bewegungsgleichungen. Sind sie aufgestellt, können aus ihnen die Gleichungen

[1] Einstein'sche Summenkonvention: Über gleiche obere und untere Indizes ist zu summieren, d.h. $y_i x^i = y_1 x^1 + y_2 x^2 + usw.$

als Lösung hergeleitet werden, welche die Bewegung der Teilchen beschreiben. Die Größe L ist die so genannte Lagrange Funktion, sie ist eine Differenz aus kinetischer und potentieller Energie, die x^i sind die kontravarianten[2] Koordinatenkomponenten, die mit den oberen Indizes $i = 1,...,3$ nummeriert werden, die $\dot{x}^i$ sind die entsprechenden Geschwindigkeiten, später treten noch die Beschleunigungen $\ddot{x}^i$ in Erscheinung.

Nun kümmern wir uns um das Aufstellen der Bewegungsgleichungen. Darum bilden und finden wir zunächst:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^l} = m g_{il} \dot{x}^i \qquad (3)$$

und

$$\frac{\partial L}{\partial x^l} \equiv L,_l = \frac{m}{2} g_{ik},_l \dot{x}^i \dot{x}^k \qquad (4).$$

Wie in der Sprache der Allgemeinen Relativitätstheorie üblich, bedeutet das Komma in (4) die partielle Ableitung – aber wir befinden uns nicht in der Allgemeinen Relativitätstheorie, wir verwenden hier nur, um es noch einmal zu betonen, deren geometrische-mathematische Sprache und darum laufen unsere Indizes nicht von 1 bis 4, sondern nur von 1 bis 3, wegen der 3 Raumkoordinaten.

Bilden wir nun noch die Zeitableitung von (3):

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^l} = m g_{il},_m \dot{x}^i \dot{x}^m + m g_{il} \ddot{x}^i \qquad (5),$$

wobei wir die Produktregel der Differentialrechnung beachteten, weil die Komponenten des metrischen Tensors von den Koordinaten abhängen können. Der metrische Tensor selber sei aber nicht zeitabhängig.

Die Lagrange-Gleichungen finden wir durch Einsetzen von (4) und (5) in (2):

$$m g_{il},_m \dot{x}^i \dot{x}^m + m g_{il} \ddot{x}^i - \frac{m}{2} g_{ik},_l \dot{x}^i \dot{x}^k = 0 \quad (6).$$

Offensichtlich ist das bereits die Geodätengleichung, die Masse kürzt sich heraus und nach Umsortieren erhalten wir den Ausdruck:

$$g_{il} \ddot{x}^i + g_{il},_m \dot{x}^i \dot{x}^m - \frac{1}{2} g_{ik},_l \dot{x}^i \dot{x}^k = 0 \qquad (7).$$

Uns stört noch der Faktor g_{il} vor der Beschleunigung $\ddot{x}^i$ im ersten Term, auch weil hier eine Summation erfolgt, wir hätten lieber die Beschleunigung für eine einzige Koordinate isoliert aufgeschrieben. Um dieses Ziel zu erreichen, multiplizieren wir die Gleichung kontravariant mit g^{nl}:

$$g^{nl} g_{il} \ddot{x}^i + g^{nl} (g_{il},_m \dot{x}^i \dot{x}^m -$$

$$- \frac{1}{2} g_{ik},_l \dot{x}^i \dot{x}^k) = 0 \qquad (8),$$

und wegen $g^{nl} g_{il} = \delta_i^n$ folgt:

---

[2] Sind die Basisvektoren $\vec{e}_i$ eines frei gewählten Koordinatensystems als kovariante Einheitsvektoren festgelegt, so definieren diese die metrischen kovarianten Tensorkomponenten g_{ik} über das Skalarprodukt $g_{ik} = \vec{e}_i \cdot \vec{e}_k$. Man beachte, dass diese Basisvektoren nicht orthogonal aufeinander stehen müssen. Die kontravarianten Basisvektoren sind dann über die Beziehung $\vec{e}^m = g^{ml} \vec{e}_l$ verknüpft und durch obere Indizes gekennzeichnet, wobei die kontravarianten Komponenten des metrischen Tensors über die Beziehung $\delta_m^n = g^{nk} g_{mk}$ mit den kovarianten Tensorkomponenten verknüpft sind. δ_m^n ist das Kronecker-Symbol mit der Eigenschaft $\delta_1^1 = \delta_2^2 = \delta_3^3 = 1$, sonst Null. Ein Ort $\vec{r}$ wird dann durch die Beziehungen $\vec{r} = x^i \vec{e}_i = x_i \vec{e}^i = x^i g_{ik} \vec{e}^k = x_i g^{ik} \vec{e}_k$ beschreibbar.

$$\delta_i^n \ddot{x}^i + g^{nl}(g_{il},_m \dot{x}^i \dot{x}^m -$$

$$-\frac{1}{2} g_{ik},_l \dot{x}^i \dot{x}^k) = 0 \qquad (9).$$

Auch ist der zweite Term noch nicht richtig angenehm, weil wir in der bestehenden Form die $\dot{x}^i \dot{x}^k$ nicht ausklammern können. Wir können uns überlegen, den Term $g_{il},_m$ äquivalent zu verändern, d.h. man muss sich anschauen, wie eigentlich summiert wird, und finden:

$$g_{il},_m \dot{x}^i \dot{x}^m = \frac{1}{2}(g_{il},_m + g_{il},_m)\dot{x}^i \dot{x}^m =$$

$$= \frac{1}{2}(g_{il},_m + g_{ml},_i)\dot{x}^i \dot{x}^m \qquad (10).$$

Ersetzung[3] von m durch k in (10) und Einsetzen des Resultates davon in die Geodätengleichung (9) führt auf:

$$\delta_i^n \ddot{x}^i +$$

$$+\frac{1}{2} g^{nl}\left((g_{il},_k + g_{kl},_i)\dot{x}^i \dot{x}^k - g_{ik},_l \dot{x}^i \dot{x}^k\right) =$$

$$= \delta_i^n \ddot{x}^i +$$

$$+\frac{1}{2} g^{nl}\left(g_{il},_k + g_{kl},_i - g_{ik},_l\right)\dot{x}^i \dot{x}^k = 0 \qquad (11).$$

Bedenken wir noch, was das Kronecker-Symbol δ_i^n bewirkt, dann ergibt sich:

$$\ddot{x}^n + \frac{1}{2} g^{nl}\left(g_{il},_k + g_{kl},_i - g_{ik},_l\right)\dot{x}^i \dot{x}^k = 0 \qquad (12).$$

Die Beziehung (12) ist die übliche Form der Geodätengleichung. Führen wir die Abkürzung mittels der so genannten Christoffel-Symbole ein, dann erhalten wir mit

$$\Gamma_{ik}^n = \frac{1}{2} g^{nl}\left(g_{il},_k + g_{kl},_i - g_{ik},_l\right) \qquad (13)$$

endgültig:

$$\ddot{x}^n + \Gamma_{ik}^n \dot{x}^i \dot{x}^k = 0 \qquad (14).$$

Obwohl wir nur den einfachen Fall des Newtonschen dreidimensionalen Raumes mit der Bewegung eines freien Teilchens untersuchen wollen, haben wir für die Bewegungsgleichung bereits die Form, wie sie in der Allgemeinen Relativitätstheorie[4] gilt, wenn sich ein Teilchen allein unter dem Einfluss der Gravitation bewegt, erhalten. Das ist der Vorteil der langen Rechnung, obwohl der zu betrachtende Fall, physikalisch gesehen der einfachste Falle ist, den man sich überhaupt denken kann.

Die quantenmechanische Hamilton-Jacobi-Gleichung

Ausgehend von der Schrödinger Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^{\,2}}\psi + U\psi \qquad (15),$$

mit dem Potential $U = U(\vec{r})$ und dem allgemeinen Ansatz für die Wellenfunktion

$$\psi = ae^{i\frac{S}{\hbar}} \qquad (16)$$

führt das Einsetzen von (16) in die Schrödinger Gleichung (15) auf die quantenmechanische Hamilton-Jacobi-Gleichung

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}} + U - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial \vec{r}^{\,2}} = 0 \qquad (17).$$

[3] Solche Ersetzungen von Indizes durch andere Indizes sind in Summationen immer möglich, man substituiert entsprechend den Zielstellungen der Umformung. Es ist nur darauf zu achten, dass es nicht zu Konflikten mit anderen Indizes (Buchstaben) kommt.

[4] Es sei angemerkt, dass man sich in der Relativistischen Physik die Christoffel-Symbole nicht mittels (13) beschafft, sondern mittels (14), in dem man sich die Bewegungsgleichungen verschafft und die Symbole einfach abliest.

Die Größe S ist die klassische Wirkungsfunktion, ferner gilt für den Impuls $\vec{p} = \frac{\partial S}{\partial \vec{r}}$, sowie die Normierungsbedingung:

$$1 = \int_V \psi \psi^* dV \quad (18).$$

Neben (17) ergibt sich aus der Rechnung die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial a^2}{\partial t} + div\left(a^2 \frac{1}{m} \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \right) = 0 \quad (19).$$

Die ausführliche Herleitung von (17) und (18) ist in [1] nachzulesen, darum wird an dieser Stelle darauf verzichtet.

Da uns nur die freie Teilchenbewegung interessiert, reduziert sich (17) auf

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{a} \frac{\partial^2 a}{\partial \vec{r}^{\,2}} = 0 \quad (20).$$

Aus der Beziehung (20) lesen wir die quantenmechanische Hamilton-Funktion

$$H = \frac{1}{2m} \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \frac{\partial S}{\partial \vec{r}} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{a} \frac{\partial^2 a}{\partial \vec{r}^{\,2}} \quad (21)$$

ab. Der erste Term repräsentiert die klassische kinetische Energie des Teilchens und wir können den ersten Term durch den Ausdruck (1) substituieren:

$$H = \frac{m}{2} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{a} \frac{\partial^2 a}{\partial \vec{r}^{\,2}} \quad (22).$$

Den zweiten Term können wir formal verallgemeinert[5] durch

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{a} \frac{\partial^2 a}{\partial \vec{r}^{\,2}} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{a} g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} a \quad (23)$$

ausdrücken und an die Stelle von (22) tritt der allgemeine Ausdruck:

$$H = \frac{m}{2} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{a} g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} a \quad (24).$$

Stellen wir (24) in kartesischen Koordinaten auf, was für die Analyse von Vorteil ist, dann reduziert sich (24) auf

$$H = \frac{m}{2} g_{kk} \left(\dot{x}^k \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{a} g_{kk} \frac{\partial^2 a}{\left(\partial x^k \right)^2} \quad (25).$$

Wir wissen, dass in diesem Fall $g_{kk} = g^{kk} = 1$ gilt, wir schreiben die Faktoren aber trotzdem formal mit, um zu sehen, wo die Komponenten des metrischen Tensors auftauchen.

Ersetzen wir weiter die Geschwindigkeiten durch die Impulse

$$\dot{x}^k = \frac{1}{m} p^k \quad (26),$$

ergibt sich nach Ausklammern für (25):

$$H = \frac{1}{2m} g_{kk} \left(p^k p^k - \frac{\hbar^2}{a} \frac{\partial^2 a}{\left(\partial x^k \right)^2} \right) \quad (27).$$

In dieser Form lässt sich der Faktor mit der Klammer als ein Impuls-Quadrat

$$P^2 = g_{kk} \left(p^k p^k - \frac{\hbar^2}{a} \frac{\partial^2 a}{\left(\partial x^k \right)^2} \right) \quad (28)$$

lesen. Der zugehörige Impuls ist komplexwertig:

[5] Es ist $\frac{\partial^2}{\partial \vec{r}^{\,2}} = \Delta$ der Laplace-Operator. Er kann auch in der Form $\Delta = g^{kk} \frac{\partial^2}{\left(\partial x^k \right)^2}$ aufgeschrieben werden. Im Hauptachsensystem des metrischen Tensors verschwinden alle nichtdiagonalen Elemente, und wir können auch $\Delta = g^{kl} \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial}{x^l}$ schreiben.

$$\vec{P} = \left(p^k + i\hbar\sqrt{\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\left(\partial x^k\right)^2}} \right)\vec{e}_k \qquad (29),$$

mit den kartesischen Basisvektoren $\vec{e}_k$.

Doch im Riemannschen Raum dürfen wir nicht ganz so einfach rechnen. Es gilt für die Divergenz eines Vektors:

$$div\vec{A} = \frac{\partial}{\partial\vec{r}}\vec{A} = A^k{}_{,k} + A^l\Gamma^k_{lk} \qquad (30),$$

mit den bereits eingeführten Christoffel-Symbolen. Wir können den Vektor $\vec{A}$ durch

$$\vec{A} = \frac{\partial}{\partial\vec{r}}a \qquad (31)$$

definieren, der Vektor $\vec{A}$ ist der Gradient der Amplitude der Wellenfunktion. Darum können wir den Term[6]

$$\frac{\partial^2 a}{\partial\vec{r}^{\,2}} = div\vec{A} = A^k{}_{,k} + A^l\Gamma^k_{lk} \qquad (32)$$

in (20) auch als Divergenz des Vektors $\vec{A}$ lesen und wir erhalten

$$H = \frac{m}{2}g_{ik}\dot{x}^i\dot{x}^k - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{a}\left(A^k{}_{,k} + A^l\Gamma^k_{lk}\right) \quad (33).$$

Weil wir bereits wissen, dass der Quanten-term ein Impulsquadrat ist, identifizieren wir das Quantenimpulsquadrat ganz allgemein als

$$P^2_{Quant} = -\frac{\hbar^2}{a}\left(A^k{}_{,k} + A^l\Gamma^l_{lk}\right) \qquad (34).$$

An diesem Ausdruck ist bemerkenswert, dass das Gravitationsfeld, repräsentiert durch die Größen g_{ik} , nicht explizit auftritt, sondern nur implizit in den Christoffel-Symbolen steckt, siehe (13). Die Christoffel-Symbole bilden keinen Tensor, und es kann stets ein Bezugssystem gefunden werden, in dem diese verschwinden. Aber in Bezugsystemen, in welchen die Christoffel-Symbole nicht wegtransformiert werden können, wird der Einfluss des Quantenterms auf die Teilchenbewegung modifiziert. Es muss folglich in allen nicht geodätisch bewegten Bezugssystemen zur Modifikation der Quanteneffekte kommen.

Wir hatten gehofft, dass sich aus den Umformungen ein allgemeiner Ausdruck für einen metrischen Tensor, bzw. dessen Komponenten, der Form

$$\gamma_{ik} = g_{ik} + q_{ik} \qquad (35)$$

mit einem klassischen Anteil g_{ik} und einem Quantenanteil q_{ik} ablesen ließe, dann hätte sich daraus eine direkte Beziehung zur Gravitation und eine Idee für die Erweiterung der Gravitationstheorie ergeben. Eine solche Form ist hier zumindest nicht erkennbar. Stattdessen zeigt die Form (33), dass eine nichtgeodätische Bewegung die Quanteneffekte modifiziert, und die Beziehung (29) zeigt uns, dass neben dem klassischen Impuls ein imaginärer Impuls wirkt, dessen Gehalt probabilistisch ist. Doch es scheint falsch, das zu akzeptieren, denn was ist das für ein Widersinn, einen Ausdruck aufzuschreiben, in welchem eine Möglichkeit wie eine Wirklichkeit das reale Geschehen determiniert. Was hat es zu bedeuten, dass der klassische Impulsanteil tatsächlich auch als Realteil eines komplexwertigen Impulses erscheint, und der probabilistische Impulsanteil mit einer imaginären Einheit zu schreiben ist? Es ist ja nicht so, dass der probabilistische Anteil nicht reale Wirkungen zeitigt. Ist es kein Widersinn, wenn sich eine reale Größe mit einer Möglichkeit addiert? Ist

---

[6] Man beachte: $A_l = a_{,l}$ und $A^k = g^{kl}A_l$, unter Berücksichtigung der Produktregel folgt: $A^k{}_{,m} = g^{kl}{}_{,m}A_l + g^{kl}A_{l,m}$, so dass weiter die Verjüngung $A^k{}_{,k} = g^{kl}{}_{,k}A_l + g^{kl}A_{l,k}$ folgt. Wir haben es uns erspart die Beziehungen in die ab (32) folgenden Formeln zu quetschen.

die Summe etwas Reales oder ist sie etwas Mögliches? Kann so eine Mischung aus Sein und Nichtsein reale Spektrallinien machen?

Betrachten wir (27), dann wissen wir, dass der 2. Term die reale Energie modifiziert, dass also Schrödingers tot-lebende Katzen das Geschehen beeinflussen, denn sonst gäbe es keine Interferenz am Doppelspalt! Die Irrationalität ist nicht auflösbar, solange dem Quantenterm in (27) oder dem imaginären Quantenimpulsanteil in (29) nicht selbst Realität zugesprochen wird. Nur Reales kann Reales beeinflussen!

Eine Theorie, in der das so ist, ist die Bohmsche Quantenmechanik [2]. In ihr wird der letzte Term in (28) wegen seiner Position in (17) als Quantenpotential bezeichnet, wir erkennen hier, dass sich der Term interpretativ auch als ein Impuls-Quadrat auffassen lässt und in der Tat kommt der Term aus dem Impulsanteil des Hamilton-Operators, nicht aus einem Potential-Term[7]. Es ist daher nicht unbegründet, nach einer Beziehung zur Metrik zu suchen, indem der Impuls-Anteil betrachtet wird, denn in der Allgemeinen Relativitätstheorie „spürt" ein Teilchen die Schwerkraft nicht vermittelt über ein zusätzliches Potential, wie bei Newton, sondern direkt über den Impuls-Term, der den metrischen Tensor als das Gravitationsfeld enthält. Was in der Bohmschen Mechanik das Quantenpotential ist, ist eben doch ein Bestandteil des Impuls-Terms. Aber verstanden, wie sich nun die Beziehung zur Metrik gestaltet, haben wir das damit nicht.

Was ist Bohmsche Quantenmechanik?

Bohmsche Quantenmechanik oder einfach Bohmsche Mechanik ist, vereinfacht gesagt, eine äquivalente Umformung der Schrödinger Quantenmechanik, jedoch mit einer anderen Interpretation versehen.

Sie liefert dieselben physikalischen Phänomene, wie die Schrödinger-Quantenmechanik.

Ihre mathematische Nähe zur klassischen Mechanik macht sie für unsere Untersuchung attraktiv.

Beruhend auf der so genannten Quantengleichgewichtshypothese[8] besitzen die klassisch-punktförmig gedachten Teilchen zu jedem Zeitpunkt einen Ort q und eine Geschwindigkeit, d.h. sie besitzen eine Bahn[9].

Wie wir in [1], betrachtete Bohm in [4] den klassischen Grenzfall, d.h. die Gleichung (17), in der man sofort die Hamilton-Jacobi-Gleichung der klassischen Mechanik identifiziert. In der klassischen Mechanik gilt die Beziehung

$$\vec{v} = \dot{q} = \frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \qquad (36).$$

Die Bohmsche Interpretation startet nun damit, dass der klassische Teil von (17) nicht als der Grenzfall der Quantenmechanik für $\hbar \to 0$ interpretiert und als Ausdruck der Wahrscheinlichkeitserhaltung angesehen wird, sondern, dass (36) als tatsächliche Bewegungsgleichung für tatsächliche Bahnen

[7] Der Impulsoperator ist $\hat{p} = i\hbar\nabla$. Im Hamilton-Operator erscheint er im kinetischen Term $H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U$, und es ist $\hat{p}^2 = -\hbar^2\Delta$.

[8] Die Quantengleichgewichtshypothese nimmt in der Bohmsche Quantenmechanik eine zentrale Rolle ein, sie besagt: Die Ortsverteilung ρ von Zuständen mit der Wellenfunktion Ψ ist $\rho = |\psi|^2 = a^2$, vergleiche [3].

[9] Diese Feststellung steht nicht im Widerspruch zu den Unschärferelationen, denn nach der Bohmschen Mechanik besagen die Unschärferelationen nur, wie Wechselwirkungen/Messungen zur Feststellung von Ort und Impuls sich wechselseitig stören.

$q(t)$ zu verstehen ist. Für den Term

$$U_{Quant} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{a}\frac{\partial^2 a}{\partial \vec{r}^{\,2}} \tag{37}$$

in Gleichung (17) führte Bohm die Bezeichnung Quantenpotential ein. Die Interpretation von $\frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}}$ als Geschwindigkeit auch für den quantenmechanischen Fall $\hbar \neq 0$ beizubehalten, dafür spricht, dass wegen der Kontinuitätsgleichung (19)

$$\vec{j} = a^2 \frac{1}{m}\frac{\partial S}{\partial \vec{r}} \tag{38}$$

als Strom gelesen werden kann, d.h. dass (19) mit $\rho = a^2$ in der Form

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\vec{j} = 0 \tag{39}$$

geschrieben werden kann - wie schon gesagt, sind wegen (15), (16) und (18) die Beziehungen (17) und (19) immer noch echte Quantenmechanik! In anderen Worten lässt die Quantenmechanik eben auch die Bohmsche Deutung unter der Voraussetzung der Quantengleichgewichtshypothese zu!

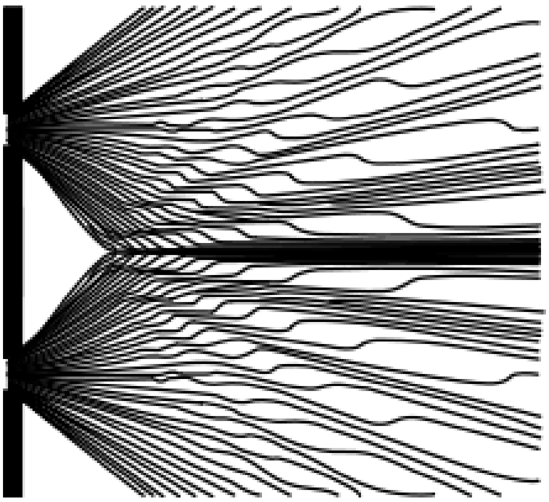

Bild: Bohmsche Bahnen am Doppelspalt, Autor Malyszkz, (Wikipedia, gemeinfrei).

Die Bewegungsgleichungen (14) der Newtonsche Mechanik sind, weil sie die zweiten zeitlichen Ableitungen enthalten, Gleichungen zweiter Ordnung. Aus diesem Grunde müssen stets Anfangsbedingungen für die Orte und Impulse, bzw. Geschwindigkeiten gelten. Die Bohmsche Mechanik legt offen, dass die Schrödinger Quantenmechanik mit (36) und der Bohmschen Interpretation Bewegungsgleichungen erster Ordnung impliziert. Damit sind Anfangsbedingungen allein für die Orte der Teilchen erforderlich, und diese Anfangsbedingungen werden durch die Quantengleichgewichtshypothese festgelegt.

Während die mathematische Form der Bohmschen Mechanik sehr nahe an der Newtonschen Mechanik zu liegen scheint, und daher sehr klassisch anmutet, ist sie doch von der klassischen Physik fundamental verschieden. Die klassische Physik ist gemäß (14) auf den Ortsraum bezogen, während ψ eine Lösung der Schrödinger Gleichung ist und eine Funktion über dem Konfigurationsraum ist. Darum ist im Unterschied zur Newtonschen Mechanik die Wirkung S auf Grund der Quantengleichgewichtshypothese erst durch die Schrödinger Gleichung festgelegt. Durch diese radikal nicht-klassische Struktur der Bohmschen Mechanik verlieren Konzepte wie Energie, Impuls etc. auf dem Niveau der individuellen Bohmschen Teilchen ihre Bedeutung, siehe [3], Seite 34 – es sei unterstrichen, das Gesagte gilt für das individuelle Teilchen, nicht für die Wellenfunktion! Die Widersprüche zwischen der klassischen Physik inklusive der Relativitätstheorien auf der einen Seite und der Quantenphysik auf der anderen Seite verdanken sich genau diesem Tatbestand – oder offenbart sich auf dem Niveau einer abstrakteren Sichtweise gerade darin eine Beziehung zur Gravitation?

Die Bewegungsgleichung (14) bringt das Äquivalenzprinzip von Trägheit und Schwere zum Ausdruck. Sie ist daher trägheitsfrei. Raumfahrer erfahren dies dadurch, dass im

Raumschiff quasi Schwerelosigkeit herrscht, während sie mit ihrem Raumschiff auf einer gekrümmten Bahn um die Erde kreisen. Sie werden also nicht, wie in einem Karussell auf Grund der Fliehkraft an die Wand gedrückt. Was wäre, wenn das Raumschiff ein mikroskopisches Teilchen wäre, welches sich im Quantenpotential bewegt?

Obwohl die Beziehung (1) nur für die freie Bewegung eines Teilchens formuliert wurde, erfasst sie die Gravitation bereits über den in ihr enthaltenen metrischen Tensor im Sinne der Allgemeinen Relativitätstheorie und wir hatten gesehen, dass aus ihr die Geodätengleichung folgt.

Wollen wir diese Beziehung mit dem quantenmechanischen Fall vergleichen, was die Bohmsche Mechanik ermöglicht, so können wir uns auf das Quantenpotential beziehen. Es sei aber vorher angemerkt, dass es innerhalb der Vertreter der Bohmschen Mechanik unterschiedliche Schulen gibt.

Die Vertreter der so genannten „Führungsfeldsichtweise“ betonen, dass die Bohmschen Bahnen bereits durch (36) sowie die Quantengleichgewichtshypothese vollständig festgelegt sind, dass es demzufolge für die Beschreibung der Bahnen keine zweiten zeitlichen Ableitungen, wie in der klassischen und relativistischen Theorie notwendig, bedarf.

Dem gegenüber heben die Vertreter der sogenannten „kausalen Sichtweise“ die Rolle des Quantenpotentials gerade deswegen hervor, weil es in sehr anschaulicher Weise die quantenphysikalischen Effekte, wie z.B. den Tunneleffekt, verstehbar macht. Beim Tunneleffekt senkt das Quantenpotential ein gegebenes Potential so ab, dass ein Teil der Teilchen das gegebene Potential passieren kann. Auf diese Art und Weise verschwindet alles Rätselhafte am Tunneleffekt, genauso wie das Doppelspaltexperiment verstehbar wird, weil nicht die Teilchen, sondern das Quantenpotential am Doppelspalt interferiert und es die Teilchen so führt, dass es zu dem bekannten Interferenzmuster kommt.

Wir wollen diesem internen Disput der Bohmianer nicht nachgehen, sondern uns das Quantenpotential zum Vergleich der Bewegungsgleichungen zweiter Ordnung nutzbar machen.

Deuten wir also (37) nicht als Term mit einem Impulsquadrat eines „Quantenimpulses“, sondern im Sinne Bohms als Quantenpotential, dann müssen wir mit (24) starten und zunächst die Lagrange Funktion aus

$$L = 2T - H \tag{40}$$

bestimmen:

$$L = \frac{m}{2} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{a} \left(A^k{}_{,k} + A^l \Gamma^k_{lk} \right) \qquad (41).$$

Doch bevor wir aus (41) die Lagrange-Gleichungen ableiten, wundern wir uns noch einmal gründlich darüber, dass die Christoffel-Symbole bereits in der Lagrange-Funktion stehen – könnte sich darin ein grundlegendes theoretisches Problem der Quantentheorie oder der Gravitationstheorie offenbaren? Niemand denkt bei der Quantisierung daran, dass Christoffel-Symbole zu berücksichtigen sind, und das fällt nicht auf, weil die Quantisierung in kartesischen Koordinaten in einem euklidischen Raum erfolgt. Bedeuten die Christoffel-Symbole in der Langrange-Gleichung oder in der Hamilton-Funktion, dass die Quantenmechanik unter der Hand ein bevorzugtes Bezugssystem, eine Art Äther, einführt? Könnte sich hier eine Beziehung zum Machschen Prinzip andeuten?

Um uns die Mühe zu ersparen, Gerechnetes, wie die Herleitung der Geodätengleichung (14), noch einmal zu rechnen, teilen wir uns die Lagrange-Funktion formal in den klassischen kinetischen Term (1) und den Quantenterm (37) auf:

$$L = T - U_{Quant} \quad (42).$$

Die Lagrange-Gleichungen sind dann

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}^l} - \frac{\partial T}{\partial x^l} -$$

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial U_{Quant}}{\partial \dot{x}^l} + \frac{\partial U_{Quant}}{\partial x^l} = 0 \quad (43).$$

Die ersten beiden Terme in (43) ergeben die beiden Terme der Geodätengleichung, und wir müssen nur noch die entsprechenden Quanten-Terme bilden.

Beginnen wir also mit

$$\frac{\partial U_{Quant}}{\partial \dot{x}^l} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^l}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{a}\left(A^k,_k + A^m \Gamma^k_{mk}\right)\right) (44)$$

Wir haben Glück, und die Größe a ist nicht geschwindigkeitsabhängig, darum sind auch die A^k nicht geschwindigkeitsabhängig und auch die Christoffel-Symbole bestehen nur aus metrischen Tensorkomponenten und ihren Derivierten. Das bedeutet

$$\frac{\partial U_{Quant}}{\partial \dot{x}^l} = 0 \quad (45),$$

und folglich auch

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial U_{Quant}}{\partial \dot{x}^l} = 0 \quad (46).$$

Wir haben also nur

$$\frac{\partial U_{Quant}}{\partial x^l} = \frac{\partial}{\partial x^l}\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{a}\left(A^k,_k + A^m \Gamma^k_{mk}\right)\right) (47)$$

zu bilden. Schon bevor wir damit anfangen, wird die extreme Verzahnung von Geometrie und Quantenpotential offensichtlich, d.h. schon in der von uns vorgenommenen nichtrelativistischen Näherung verraten uns die mathematischen Strukturen, wie nichttrivial die Beziehungen zwischen einer geometrischen Theorie der Gravitation und der Quantenmechanik sind.

Um diese Beziehungen effektiv zu berechnen, verschaffen wir uns zuerst die benötigten Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{1}{a}\right) = -\frac{1}{a^2}a,_l \quad (47),$$

$$\frac{\partial}{\partial x^l}\left(A^k,_k\right) = A^k,_{kl} \quad (48),$$

$$\frac{\partial}{\partial x^l}\left(A^m\right) = A^m,_l \quad (49),$$

$$\frac{\partial}{\partial x^l}\left(\Gamma^k_{mk}\right) = \Gamma^k_{mk},_l \quad (50),$$

mit

$$\Gamma^k_{mk},_l = \frac{1}{2}g^{ki},_l\left(g_{mi},_k + g_{ki},_m - g_{mk},_i\right) +$$

$$+\frac{1}{2}g^{ki}\left(g_{mi},_{kl} + g_{ki},_{ml} - g_{mk},_{il}\right) \quad (51).$$

Führen wir die Ableitung (47) unter Beachtung der Produktregel für das Differenzieren aus, dann finden wir:

$$\frac{\partial U_{Quant}}{\partial x^l} = -\frac{\hbar^2}{2m}Q,_l \quad (52),$$

mit

$$Q,_l = -\frac{1}{a^2}a,_l\left(A^k,_k + A^m \Gamma^k_{mk}\right) +$$

$$+\frac{1}{a}A^k,_{kl} + \frac{1}{a}A^m,_l \Gamma^k_{mk} + \frac{1}{a}A^m \Gamma^k_{mk},_l \quad (53).$$

Die Lagrange-Gleichungen sind dann:

$$\ddot{x}^n + \frac{1}{2}g^{nl}\left(g_{il},_k + g_{kl},_i - g_{ik},_l\right)\dot{x}^i \dot{x}^k =$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m^2} g^{nl} Q,_l \qquad (54).$$

Wir haben bewusst den Quantenterm in (54) auf die rechte Seite gebracht. So ist der Beziehung (54) direkt anzusehen, dass der Quantenterm eine Kraft ist, welche die geodätische Bewegung stört.

Diese Störung ist umso stärker, je kleiner die Masse eines Teilchens ist. Die Steigerung der Störung ist sogar proportional $\frac{1}{m^2}$, je kleiner die Masse des Teilchens umso dominanter wird der Einfluss der Quantenkraft. Was wir in [1] als „Quantentod der Gravitationstheorie" schon an der Form der Hamilton-Funktion ablesen konnten, das zeigt sich nun in seiner konkretisierten mathematischen Form.

Der Kehrwert der Masse kann als Quelle einer Quantenkraft, oder besser eines Quantenkraftfeldes gelesen werden. Diese universelle Quantenkraft verhindert die strenge Gültigkeit des Äquivalenzprinzips, weil sie genauso wenig abgeschirmt werden kann, wie das Gravitationsfeld selbst.

Wo eine Masse ist, ist ein Gravitationsfeld, wo eine Masse ist, ist aber auch ihr Kehrwert, und wo ihr Kehrwert ist, ist auch eine Quantenkraft, und die Quantenkraft stört die geodätische Bewegung. Und damit ist das fundamentale Prinzip der Gravitationstheorie, das Geodätenprinzip, d.h. Äquivalenzprinzip verletzt, denn die Masse kann sich nicht mehr aus der Bewegungsgleichung wegkürzen!

Wären die Raumschiffe Mikroteilchen, würden die Quantenkräfte die Raumfahrer an die Wände schleudern!

Ein massives Raumschiff würde annähernd der Geodäte folgen, während gerade die abgemagerten Kosmonauten vom Quantenpotential hin und her gerüttelt würden.

Diskussion über einen Einwand gegen den „Quantentod" der Gravitationstheorie

Historisch besteht die Diskussion über die Beziehungen zwischen der Allgemeinen Relativitätstheorie und der Quantenphysik seit der Entstehung der Quantenmechanik. Ein modernes Argument pro Allgemeiner Relativitätstheorie (ART) vertritt Horst-Heino von Borzeszkowski in [5]:

„Fasst man die diese Jahrzehnte währende Diskussion zusammen, so kann man konstatieren: aus dem Verhalten eines Quantensystems in einem äußeren (nicht quantisierten) Gravitationsfeld, lässt sich kein Widerspruch zwischen Quantentheorie und ART ableiten. Die Wirkung des äußeren Gravitationsfeldes erweist sich entweder als physikalisch völlig harmlos, so dass die Beziehung von Quanten- und Gravitationstheorie in diesen Gedankenexperimenten gar nicht angesprochen wird, oder – und das wurde von Rosenfeld 1965 auch gezeigt – die durch solche Überlegungen konstruierbaren Gegensätze treten in einem Gebiet auf, das durch die Heisenbergsche Unschärferelation von den physikalischen Betrachtungen ausgeschlossen ist. Die Unschärferelationen garantieren also nicht nur, dass es zu keinem Widerspruch innerhalb der Quantentheorie (d.h. zwischen Wellen- und Teilchenbild) kommt, sondern auch, dass Quantentheorie und schwaches Äquivalenzprinzip (das in der ART die Wirkung eines äußeren Gravitationsfeldes auf ein physikalisches System bestimmt) miteinander verträglich sind." (Zitat, Horst-Heino von Borzeszkowski*)*

Das Argument Borzeszkowskis geht an dem Kern des Problems vollständig vorbei, denn es bestreitet den Konflikt unter Verweis auf den physikalischen Bereich, in dem die Quanteneigenschaften gerade keine Rolle spielen. Aber dort, wo sie eine Rolle spielen, im Bereich der Unschärferelation, soll ausgerechnet die Unschärferelation dafür sprechen, dass an der Gültigkeit der Allgemeinen Relativitätstheorie festgehalten werden kann.

Es ist aber gerade die Unschärferelation ein Ausdruck dafür, dass die klassische Mechanik versagt. Die Allgemeine Relativitätstheorie ist aber nichts anderes als die Verallgemeinerung der klassischen Mechanik auf Grund der Berücksichtigung der endlichen Wirkungsausbreitung und der Deutung der Gravitation als Riemannsche Raum-Zeit.

Mit dem Argument Borzeszkowskis könnte man auch den Widerspruch zwischen Quantenmechanik und klassischer Physik leugnen, in dem Sinne, dass gerade die Unschärferelation dafür sorgt, dass die klassische Mechanik universell gilt.

Weder die klassische Mechanik, noch die Allgemeine Relativitätstheorie kennen eine Unschärferelation! In der klassischen Mechanik und in der Relativitätstheorie sind die Teilchenbahnen scharf definiert! Es existieren in ihnen keine Wirkungsquanten.

Das Argument Borzeszkowskis ist logisch, wenn man den Quantencharakter der Natur einseitig den Quantenobjekten zuordnet, wobei sich die Quantenteilchen in einer durch die Allgemeine Relativitätstheorie bestimmten Raum-Zeit bewegen. Unter dieser Voraussetzung erscheint die Unschärfe, d.h. die Unbestimmtheit der Bahn, als eine Eigenschaft der Materie, welche mit der Raum-Zeit eigentlich nichts zu tun hat. In diesem Sinne wäre die Quantenmechanik keine eigentliche Neufassung der Mechanik, sondern eine Revision des Teilchenbegriffs.

Doch seit de Broglie 1927 und Bohm 1952 wissen wir, dass die Quantenmechanik völlig widerspruchsfrei auch anders als nach der Kopenhagener statistischen Deutung gelesen werden kann, dass auch in der Quantenmechanik ein Teilchen zu jedem Zeitpunkt eine Bahn besitzt. Aber diese Bahnen sind keine geodätischen Bahnen mehr, sie werden durch den Quantenimpuls oder (je nach Lesart) durch das Quantenpotential beeinflusst.

Die Stärke dieses Einflusses hängt von nichts anderem ab, und das ist hier entscheidend, als von der Masse des Teilchens. Aber gerade die Masse spielt in der Gravitationstheorie eine zentrale Rolle! Darum deutet sich genau hier eine tiefe Beziehung zwischen Gravitations- und Quantenphysik an, die weder im Rahmen der Quantentheorien noch im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie erklärt ist.

Dieses Argument ist nicht von der Sichtweise auf die Quantenmechanik abhängig, es ist im Kern vollkommen egal, ob man der Kopenhagener statistischen Deutung folgt oder ob man den Standpunkt der Bohmschen Mechanik einnimmt.

Historisch existiert eine bemerkenswerte Analogie: Albert Einstein hatte gerade aus der seltsamen Gleichheit von träger und schwerer Masse, die er in der Newtonschen Mechanik und Gravitationstheorie beobachtete, die theoretischen Konsequenzen gezogen, welche in der Allgemeinen Relativitätstheorie gipfelten.

Wenn wir uns ähnlich auf die Quantenmechanik und Relativitätstheorie beziehen, dann müssen wir konstatieren, dass es neben der Äquivalenz von Trägheit und Schwere gemäß Einstein auch eine Quelle des Quantenpotentials gibt, den Kehrwert der Masse – und eben dieser Umstand ist im Unterschied zum Äquivalenzprinzip theoretisch nicht aufgearbeitet. Und exakt dieses Quantenpotential bricht das Äquivalenzprinzip und untergräbt dadurch das theoretische Fundament der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Quellen

[1] Klaus Retzlaff, *„Der Quantentod der Gravitationstheorie“*, Webseite der Astronomische Gesellschaft Magdeburg e.V., 02/2017

[2] Detlef Dürr, „Bohmsche Mechanik als Grundlage der Quantenmechanik“, Springer, 2001

[3] Oliver Passon, „Bohmsche Mechanik“, Verlag Harri Deutsch, 2010

[4] David Bohm, „A suggested interpretation of quantum theory in terms of hidden variables“, Phys. Rev. (5, 166(i) und 180(II), 1952

[5] H.-H. v. Borzeszkowski, „Quantisierung der Gravitation und Äquivalenzprinzip“, Seiten 12-23, Gravitation und Kosmos, Beiträge zu Problemen der Allgemeinen Relativitätstheorie, Akademie-Verlag Berlin, 1988