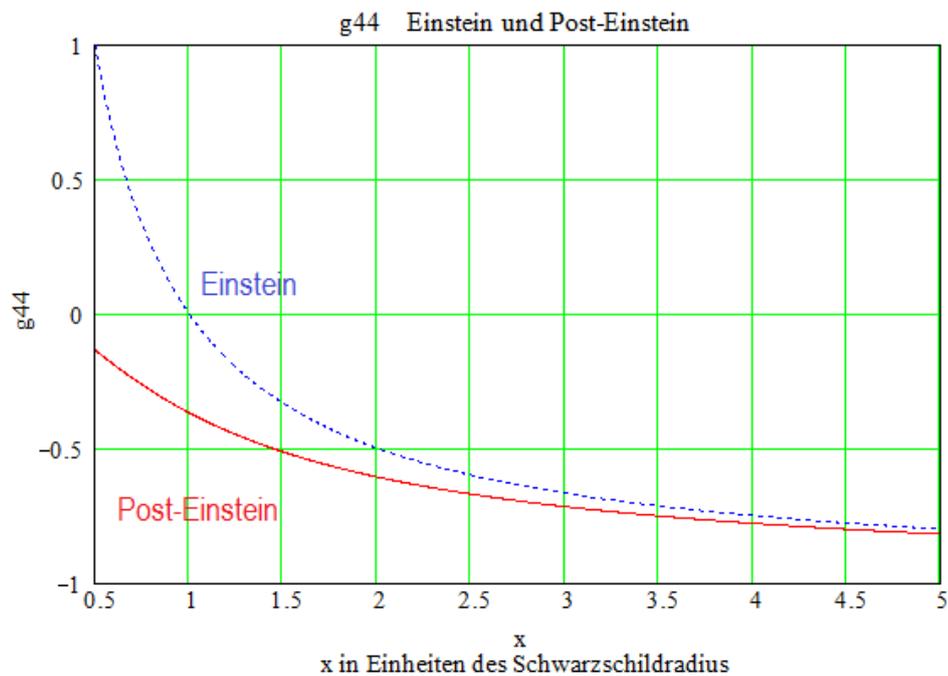


Einstein- und Post-Einstein-Effekte im Zentralfeld

- Singularitätsfreie Gravitation -



Dr. Klaus Retzlaff
04/2017

Einstein- und Post-Einstein-Effekte im Zentralfeld
Klaus Retzlaff





Gewidmet
meiner lieben Frau
Ilona

Einstein- und Post-Einstein-Effekte im Zentralfeld
Klaus Retzlaff





Zusammenfassung: Das kugelsymmetrische Gravitationsfeld wird durch die berühmte Schwarzschild-Metrik beschrieben. Ihr Erfolg beruht auf der besten Beschreibung der Periheldrehung des Planeten Merkur, konkret der Erklärung des Restanteils der Periheldrehung, der auf Basis der Newtonschen Theorie nicht erklärt werden kann, und der Lichtablenkung von Sternenlicht im Schwerefeld der Sonne. Die äußere Schwarzschild-Metrik ist eine exakte Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen. Sie prognostiziert die Existenz Schwarzer Löcher. Die Existenz solcher Objekte ist theoretisch problematisch. Einstein selbst hielt seine Feldgleichungen nicht für das letzte Wort. Auf der anderen Seite sind superdichte Materiezustände nachgewiesen, die auf Basis der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) als „Black Hole“ interpretiert werden müssen. Diese Interpretation ist aber nicht zwingend, da in starken Gravitationsfeldern kein Nachweis für die Gültigkeit der ART vorliegt. In dieser Arbeit wird eine Metrik konstruiert, die superdichte Materiezustände zulässt, aber die Existenz Schwarzer Löcher vermeidet.

Diese Arbeit ist der Beweis, dass die Deutung superdichter Materiezustände als „Schwarze Löcher“ rein hypothetischer Natur ist, weil mit dieser Arbeit der Existenzbeweis für eine Gravitationstheorie geführt wird, die ebenfalls in der Lage ist, die Einstein'schen Effekte zu erklären, einschließlich Gravitationslinsen u.d.g.l. m., in welcher aber kein Singularitätsproblem auftritt. Damit sind auch alle Aussagen über den superdichten Frühzustand des Universums (Urknall) als rein hypothetisch nachgewiesen¹. Das hier analysierte singularitätsfreie allgemein-relativistische kugelsymmetrische Gravitationsfeld weist die gleiche empirische Evidenz auf, wie die Schwarzschild-Lösung der Allgemeinen Relativitätstheorie. Darüber hinaus kann aus der Metrik ein Dunkle-Materie-Effekt deduziert werden, der die Erklärung der Bewegung von Objekten außerhalb der galaktischen Scheibe eventuell ohne die Annahme einer neuen zusätzlichen hypothetischen Materie erklären kann. Das hat sie bemerkenswerter Weise mit der ART gemeinsam².

Die Auflösung des Singularitätsproblems erfolgt zunächst als mathematisches Experiment durch die Konstruktion einer singularitätsfreien so genannten Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik. Überraschenderweise konnte diese Metrik nach ihrer Konstruktion auf eine fundamentale Beziehung zur Quantenphysik zurückgeführt, und damit physikalisch begründet werden.

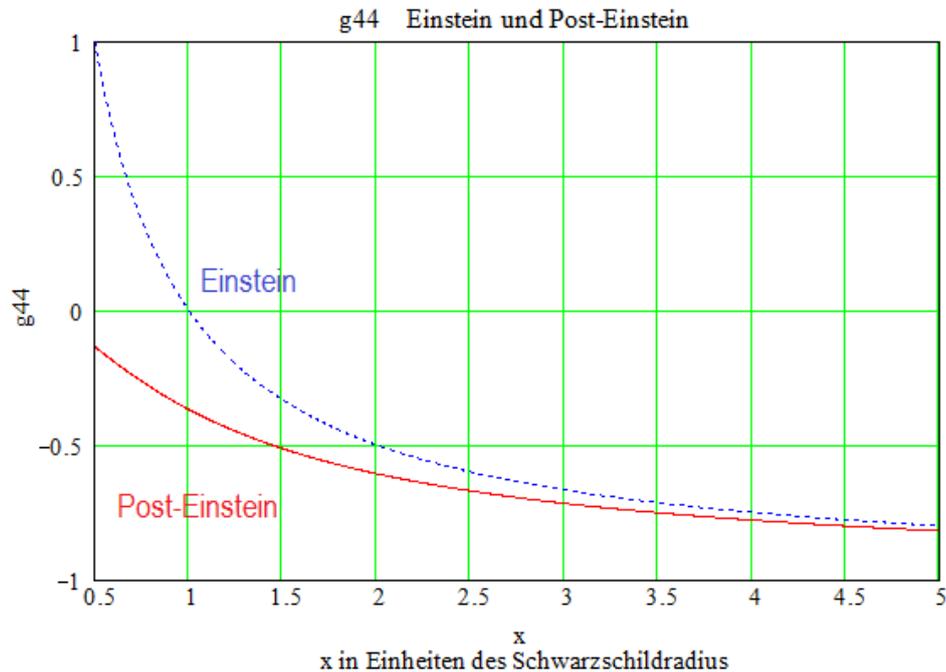
Eignung für das Studium: Wie immer führen wir die Rechnungen sehr ausführlich durch, um Studenten und Interessierten das Nachrechnen und das Kennenlernen der Mathematik zu erleichtern. Entsprechend dem Titel werden sowohl die Einstein'schen Effekte im Planetensystem, als auch die Post-Einstein-Effekte vorgerechnet. Die Rechnungen sind vollständig und wesentlich ausführlicher als in den Lehrbüchern. In den Lehrbüchern werden oft aus Platzgründen viele Schritte weggelassen oder nur ansatzweise erwähnt. Dem gegenüber ist hier so verfahren worden, dass mehr mathematisch – technische Rechnungen im Anhang ausführlich dargestellt werden, alle übrigen hauptsächlich physikalisch determinierten Rechnungen im Haupttext der Fachlogik folgen.

¹ Das ist allerdings nicht der erste Nachweis dieser Art, beispielsweise hat Treder bereits 1971 eine Theorie der Gravitation vorgeschlagen, die ebenfalls alle Einstein-Effekte korrekt beschreibt und in der eine Selbstabschirmung der Gravitation erfolgt, in dieser Theorie absorbieren die materiellen Partikel in Abhängigkeit von ihrer Masse die Schwerkraft. Es sei auch auf die Theorie von Greiner (Autor der bekannten Lehrbuchreihe zur Theoretischen Physik) 2010 verwiesen, welche als Fortsetzung der ART ins Komplexwertige zu verstehen ist, in der es eine antigravitativ wirkende Selbstregulation der Gravitation gibt. Auch nach Greiners Theorie werden die Einstein-Effekte korrekt beschrieben. Allen Theorien dieser Art ist der fundamentale Bruch mit dem Standard-Modell der Kosmologie eigen.

² Nach Kenntnis des Autors wird bei der Simulation galaktischer Rotationskurven kein Bezug auf die ART genommen, weil der Einfluss als klein angesehen wird, wichtige nichtlineare Effekte werden dadurch aber vernachlässigt.

Einstein- und Post-Einstein-Effekte im Zentralfeld
Klaus Retzlaff





Intentionen

Es geht um eine theoretisch und empirisch begründbare allgemein-relativistische Gravitationstheorie, in der keine Singularitätsproblematik existiert. Die Idee ist die Konstruktion einer Metrik, welche die äußere Schwarzschild-Metrik als Näherung enthält, in der aber Schwarze Löcher nicht auftreten können. Die Basis der Erweiterung der Metrik ist eine e-Funktion, deren Reihenentwicklung Post-Einstein-Terme liefert, während die Einstein'sche ART nur die ersten beiden Terme der Entwicklung produziert. Es könnte auf der neuen Basis superdichte Materiezustände geben, ohne die theoretischen Probleme von Black-Holes zu ernten.

Tatsächlich leistet die Metrik mehr als das, sie enthält ein Prinzip der Selbstabschirmung und Selbstregulation der Schwerkraft, welches zugleich auch einen Dunkle-Materie-Effekt einschließt, so dass sie dadurch eines der aktuell bedeutendsten Rätsel der Astrophysik auf eine gravitationsfeldtheoretische Ursache zurückführt³.

Da die Schwarzschild-Metrik der ART eine eindeutige und exakte Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen ist, muss die neu konstruierte Metrik mit Prinzipien der ART brechen. Tatsächlich wird aber nur das so genannte starke Äquivalenzprinzip verletzt, welches nicht zuverlässig experimentell gesichert ist, während alle anderen Prinzipien, insbesondere das schwache Äquivalenzprinzip gewahrt bleiben.

³ Es sei angemerkt, dass in den Lehrbuchdarstellungen zur Dunklen Materie in Galaxien die besondere Geometrie der galaktischen Scheibe vollkommen unberücksichtigt bleibt. Dadurch wird mit einer völlig falschen geometrischen Voraussetzung argumentiert und gerechnet, die nachgewiesenermaßen auf viel zu kleine Sternengeschwindigkeiten führt. Auch bleiben neueste Erkenntnisse über die erhebliche Dichte des intergalaktischen Wasserstoffs (0,01 bis 0,001 Atome pro cm^3 , Welt der Physik, 23.7.2014, siehe auch Jochen Schmitz, Themenheft: „Intergalaktischer Wasserstoff jenseits der sichtbaren Galaxie“, Cuvillier Verlag Göttingen, 03/2016) bisher unberücksichtigt.

Einstein- und Post-Einstein-Effekte im Zentralfeld
Klaus Retzlaff





Inhaltsverzeichnis

Die Konstruktion der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik	10
Berechnung der Geodätengleichung zur Schwarzschild-Metrik	12
Berechnung der Geodätengleichung zur Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik	16
Übersicht (Komponenten des metrischen Tensors und Christoffel-Symbole zu den Metriken)	20
Berechnung der Newtonschen Bewegungsgleichungen und Vergleiche	26
Korrespondierende klassische Gravitationsgesetze	30
Planetenbewegung im Newtonschen Gravitationsfeld	33
Das effektive Potential der Newtonschen Planetenbewegung	36
Finite Bewegung im Newtonschen Zentralfeld	37
Periheldrehung im Newtonschen Zentralfeld	42
Planetenbewegung in der Schwarzschild-Metrik	43
Das effektive Potential zur Schwarzschild-Metrik	45
Finite Bewegung in der Schwarzschild-Metrik	49
Periheldrehung in der Schwarzschild-Metrik	55
Planetenbewegung in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik	57
Das effektive Potential in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik	59
Periheldrehung in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik	64
Lichtablenkung im Newtonschen Gravitationsfeld	66
Lichtablenkung in der Schwarzschild-Metrik	71
Lichtablenkung in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik	78
Rotverschiebung elektromagnetischer Strahlung in der Newtonschen Gravitationstheorie	80
Rotverschiebung elektromagnetischer Strahlung in der Schwarzschild-Metrik	85
Rotverschiebung elektromagnetischer Strahlung in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik	86
Newtonsche, Einstein'sche und Post-Einstein'sche Kreisbewegung	87
Die Kreisbewegung im klassischen Newtonschen Zentralfeld	88
Die Beschreibung der Abweichungen von der Newtonschen Rotation im kugelsymmetrischen Zentralfeld	89
Die Kreisbewegung in der Schwarzschild-Metrik	89
Die Kreisbewegung in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik	92
Vergleich der Abweichungsfunktionen	95
* Allgemeine Diskussion *	96
Über die Rolle der Quantenbeziehung und des Newtonschen Potentials zur relativistischen Gravitation	96
Über die Hypothese, das Licht als Uhr für die Messung der lokalen Zeit zu betrachten	98

Anhänge

A Integration des elliptischen Integrals, Newtonsche Planetenbewegung	100
B Lösung der Kubischen Gleichung zur Diskussion der Planetenbewegung in der ART	106
C Basisdaten und Ergebnisdaten – Übersicht	110
D Integration zur Berechnung der Periheldrehung	112
E Untersuchung der Anwendbarkeit der quasi-klassischen Näherung in einer Newtonschen absoluten Raum-Zeit	124

Einstein- und Post-Einstein-Effekte im Zentralfeld

Klaus Retzlaff



Verwendete und zu empfehlende Ergänzungsliteratur

L.D. Landau, E.M. Lifschitz, Lehrbuch der Theoretischen Physik II, Klassische Feldtheorie, Akademie-Verlag-Berlin, 1981

H. Stephani, Allgemeine Relativitätstheorie, Einführung in die Theorie des Gravitationsfeldes, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980

H. Melcher, Relativitätstheorie in elementarer Darstellung, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1970

Michael Ruhrländer, Aufstieg zu den Einsteingleichungen, Einführung in die quantitative Allgemeine Relativitätstheorie, Pro BUISSNESS GmbH, Schwedenstraße 14, 13357 Berlin, 2014



Die Konstruktion der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Aufgrund der Kugelsymmetrie führen wir die Kugelkoordinaten ein:

$$\begin{aligned}x^1 &= r \\x^2 &= \vartheta \\x^3 &= \varphi \\x^4 &= ct\end{aligned}\tag{1}.$$

Die zugehörigen kartesischen Koordinaten sind:

$$\begin{aligned}x &= r \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \\y &= r \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \\z &= r \cos(\vartheta)\end{aligned}\tag{2}.$$

Zur Konstruktion einer Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik wird eine e-Funktion angesetzt:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{e^{-x}} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)d\varphi^2) - e^{-x}c^2dt^2\tag{3}.$$

Die Reihenentwicklung der e-Funktion ist:

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \dots\tag{4}.$$

Die äußere Schwarzschild-Metrik ist:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2\gamma M_0}{c^2 r}} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)d\varphi^2) - \left(1 - \frac{2\gamma M_0}{c^2 r}\right)c^2dt^2\tag{5}.$$

Dabei ist M_0 die Zentralmasse, z.B. die Sonne. Der Vergleich der ersten beiden Terme liefert:

$$x = \frac{2\gamma M_0}{c^2 r}\tag{6}.$$

Die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik ist damit:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{e^{-\frac{2\gamma M_0}{c^2 r}}} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)d\varphi^2) - e^{-\frac{2\gamma M_0}{c^2 r}}c^2dt^2\tag{7}.$$

Die Beziehung (7) kann noch leicht umgeschrieben werden:

$$ds^2 = e^{\frac{2\gamma M_0}{c^2 r}} dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)d\varphi^2) - e^{-\frac{2\gamma M_0}{c^2 r}}c^2dt^2\tag{8}.$$

Zur Abkürzung verwenden wir die übliche Schreibweise und dazu setzen wir:



$$M = \frac{\gamma M_0}{c^2} \quad (9).$$

Die Lagrange-Funktion für die Schwarzschild-Metrik lautet dann⁴:

$$L = \frac{m_0}{2} \left[\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{d\tau} \right)^2 + r^2 \sin^2(\vartheta) \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(\frac{dx^4}{d\tau} \right)^2 \right] \quad (10)$$

und für die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik:

$$L = \frac{m_0}{2} \left[e^{\frac{2M}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{d\tau} \right)^2 + r^2 \sin^2(\vartheta) \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 - e^{-\frac{2M}{r}} \left(\frac{dx^4}{d\tau} \right)^2 \right] \quad (11).$$

Die Euler-Lagrange-Gleichungen sind

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} - \frac{\partial L}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (12),$$

was auf die jeweiligen Geodätengleichungen führt:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (13).$$

Um die Gleichungen (13) zu erhalten, müssen die Gleichungen (12) komplett für beide Metriken durchgerechnet werden. Die resultierenden Gleichungen dienen dann der Analyse in verschiedenen Zusammenhängen, bzw. als Grundlage für Computersimulationen der Bewegung einer kleinen Masse im Zentralfeld und werden in diesem Sinne hierdurch für weitergehende Untersuchungen verfügbar gemacht.

Wir sehen bereits an der Titelgrafik, dass sich für große Abstände die Metriken sehr ähnlich verhalten, während sie in der Nähe des Schwarzschild-Radius, d.h. bei $x = 1$, stark differieren. Ein Ereignishorizont existiert in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik nicht. In Schwarzschild-Radien der Sonne (2.95km) gemessen, hat das Perihel des Planeten Merkur einen rund 15,5-millionenfachen Abstand vom Sonnenzentrum. Die Metriken sind bei diesem Abstand kaum unterscheidbar (Anhang C).

⁴ Grundsätzlich kann für die Herleitung der Geodätengleichung der Vorfaktor weggelassen werden, da er sich wegen des Äquivalenzprinzips aus den Gleichungen weghebt. Wir lassen m_0 hier stehen, um an die kinetische Energie zu erinnern, der Faktor $\frac{1}{2}$ führt zur Vereinfachung von Vorfaktoren, die sich beim Ableiten ergeben.



Berechnung der Geodätengleichungen zur Schwarzschild-Metrik

Unter Verwendung von (10) in der Form

$$L = \frac{m_0}{2} \left[\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} (\dot{r})^2 + r^2 (\dot{\vartheta})^2 + r^2 \sin^2(\vartheta) (\dot{\varphi})^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (\dot{x}^4)^2 \right] \quad (14)$$

bilden wir die erforderlichen Derivierten. Die Punktierungen bedeuten die Ableitung nach der Eigenzeit τ .

Bestimmung von $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}$:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{r}} L = \frac{m_0}{1 - \frac{2M}{r}} \dot{r} \quad (15).$$

Bestimmung von $\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}$:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{m_0}{1 - \frac{2M}{r}} \ddot{r} + \dot{r} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{m_0}{1 - \frac{2M}{r}} \right) = \quad (16),$$

$$= \frac{m_0}{1 - \frac{2M}{r}} \ddot{r} + \dot{r} m_0 \frac{-\frac{2M}{r^2} \dot{r}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} = \quad (17),$$

$$= \frac{m_0}{1 - \frac{2M}{r}} \ddot{r} - m_0 \frac{\frac{2M}{r^2}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} \dot{r}^2 \quad (18).$$

Bestimmung von $\frac{\partial L}{\partial r}$:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{m_0}{2} \left(-\frac{2\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} \frac{M}{r^2} + 2r\dot{\vartheta}^2 + 2r\sin^2(\vartheta)\dot{\varphi}^2 - \frac{2M}{r^2} (\dot{x}^4)^2 \right) = \quad (19),$$



$$= m_0 \left(- \frac{\dot{r}^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} \frac{M}{r^2} + r \dot{\vartheta}^2 + r \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 - \frac{M}{r^2} (\dot{x}^4)^2 \right) \quad (20).$$

Mittels (18) und (20) können wir die erste der 4 Lagrange-Gleichungen gemäß (12) bilden:

$$\begin{aligned} \frac{m_0}{1 - \frac{2M}{r}} \ddot{r} - m_0 \frac{\frac{2M}{r^2}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} \dot{r}^2 + \frac{m_0 \dot{r}^2}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} \frac{M}{r^2} - m_0 r \dot{\vartheta}^2 - \\ - m_0 r \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 + \frac{m_0 M}{r^2} (\dot{x}^4)^2 = 0 \end{aligned} \quad (21).$$

Aufgrund des Äquivalenzprinzips fällt die träge Masse m_0 aus der Bewegungsgleichung heraus:

$$\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \ddot{r} - \frac{\frac{M}{r^2}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} \dot{r}^2 - r \dot{\vartheta}^2 - r \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 + \frac{M}{r^2} (\dot{x}^4)^2 = 0 \quad (22).$$

Die Multiplikation mit dem Faktor $1 - \frac{2M}{r}$ ergibt:

$$\ddot{r} + \left(- \frac{\frac{M}{r^2}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} \dot{r}^2 - r \dot{\vartheta}^2 - r \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 + \frac{M}{r^2} (\dot{x}^4)^2 \right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = 0 \quad (23),$$

$$\ddot{r} - \frac{\frac{M}{r^2}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \dot{r}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (r \dot{\vartheta}^2 + r \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2) + \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (\dot{x}^4)^2 = 0 \quad (24).$$

Aus (24) lesen wir die folgenden Christoffel-Symbole ab:

$$\Gamma_{11}^1 = - \frac{\frac{M}{r^2}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, \Gamma_{22}^1 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) r, \Gamma_{33}^1 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) r \sin^2(\vartheta), \Gamma_{44}^1 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{M}{r^2} \quad (25).$$

Bestimmung von $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$:



$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_0 r^2 \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi} \quad (26).$$

Bestimmung von $\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_0 2r \sin^2(\vartheta) \dot{r} \dot{\varphi} + m_0 r^2 2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \dot{\vartheta} \dot{\varphi} + m_0 r^2 \sin^2(\vartheta) \ddot{\varphi} \quad (27).$$

Bestimmung von $\frac{\partial L}{\partial \varphi}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (28).$$

Die Beziehung (28) zeigt, dass es sich bei φ um eine zyklische Koordinate handelt. Sie taucht in der Lagrange-Funktion gar nicht auf, d.h. es liegt ein Erhaltungssatz vor - der Drehimpulserhaltungssatz.

Die nächste Lagrange-Gleichung ist:

$$m_0 2r \sin^2(\vartheta) \dot{r} \dot{\varphi} + m_0 r^2 2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \dot{\vartheta} \dot{\varphi} + m_0 r^2 \sin^2(\vartheta) \ddot{\varphi} = 0 \quad (29).$$

Wir lesen daraus ab:

$$\ddot{\varphi} = -\frac{2r \sin^2(\vartheta)}{r^2 \sin^2(\vartheta)} \dot{r} \dot{\varphi} - \frac{2r^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta)}{r^2 \sin^2(\vartheta)} \dot{\vartheta} \dot{\varphi} \quad (30),$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} + 2 \cot(\vartheta) \dot{\vartheta} \dot{\varphi} = 0 \quad (31).$$

Damit sind aus (31) die folgenden Christoffel-Symbole ablesbar:

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot(\vartheta) \quad (32).$$

Bestimmung von $\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}$:

$$\frac{\partial}{\partial \dot{\vartheta}} L = m_0 r^2 \dot{\vartheta} \quad (33).$$

Bestimmung von $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}$:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial}{\partial \dot{\vartheta}} L = m_0 2r \dot{r} \dot{\vartheta} + m_0 r^2 \ddot{\vartheta} \quad (34).$$



Bestimmung von $\frac{\partial L}{\partial \vartheta}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = m_0 r^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \dot{\varphi}^2 \quad (35).$$

Damit ist die nächste Lagrange-Gleichung:

$$m_0 2r\dot{r}\dot{\vartheta} + m_0 r^2 \ddot{\vartheta} - m_0 r^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \dot{\varphi}^2 = 0 \quad (36),$$

und wir finden:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{2}{r} \dot{r}\dot{\vartheta} - \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \dot{\varphi}^2 = 0 \quad (37).$$

Wieder lesen wir die Christoffel-Symbole ab:

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \Gamma_{33}^2 = -\sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \quad (38).$$

Bestimmung von $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^4}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^4} = m_0 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{x}^4 \quad (39).$$

Bestimmung von $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^4}$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^4} = m_0 \frac{2M}{r^2} \dot{x}^4 + m_0 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \ddot{x}^4 \quad (40).$$

Bestimmung von $\frac{\partial L}{\partial x^4}$:

$$\frac{\partial L}{\partial x^4} = 0 \quad (42),$$

Wieder haben wir eine zyklische Koordinate und damit einen Erhaltungssatz - die Energieerhaltung.

Die letzte Lagrange-Gleichung ist dann:

$$\frac{2M}{r^2} \dot{x}^4 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \ddot{x}^4 = 0 \quad (42),$$

und es folgt:



$$\ddot{x}^4 + \frac{\frac{2M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} \dot{x}^4 = 0 \quad (43).$$

Das gibt nur noch die beiden Christoffel-Symbole:

$$\Gamma_{14}^4 = \Gamma_{41}^4 = \frac{\frac{M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} \quad (44).$$

Berechnung der Geodätengleichungen zur Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Wir starten die Berechnung mit der Lagrange-Funktion (11) in der Form:

$$L = \frac{m_0}{2} \left[e^{\frac{2M}{r}} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 - e^{-\frac{2M}{r}} \dot{x}^4 \right] \quad (45).$$

Bestimmung von $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m_0 \dot{r} e^{\frac{2M}{r}} \quad (46).$$

Bestimmung von $\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}$:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m_0 e^{\frac{2M}{r}} \ddot{r} - m_0 \frac{2M}{r^2} e^{\frac{2M}{r}} \dot{r}^2 \quad (47).$$

Bestimmung von $\frac{\partial L}{\partial r}$:

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{m_0}{2} \left(-2 \frac{M}{r^2} e^{\frac{2M}{r}} \dot{r}^2 + 2r \dot{\vartheta}^2 + 2r \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 - \frac{2M}{r^2} e^{-\frac{2M}{r}} \dot{x}^4 \right) \quad (48).$$

Bestimmung der Lagrange-Gleichung:

$$e^{\frac{2M}{r}} \ddot{r} - \frac{2M}{r^2} e^{\frac{2M}{r}} \dot{r}^2 + \frac{M}{r^2} e^{\frac{2M}{r}} \dot{r}^2 - r \dot{\vartheta}^2 - r \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 + \frac{M}{r^2} e^{-\frac{2M}{r}} \dot{x}^4 = 0 \quad (49).$$



bzw. nach Multiplikation mit dem Faktor $e^{-\frac{2M}{r}}$ ergibt sich:

$$\ddot{r} - \frac{M}{r^2} \dot{r}^2 - r e^{-\frac{2M}{r}} \dot{\vartheta}^2 - r \sin^2(\vartheta) e^{-\frac{2M}{r}} \dot{\varphi}^2 + \frac{M}{r^2} e^{-\frac{4M}{r}} \dot{x}^4 = 0 \quad (50).$$

Die Christoffel-Symbole sind:

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{M}{r^2}, \Gamma_{22}^1 = -r e^{-\frac{2M}{r}}, \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2(\vartheta) e^{-\frac{2M}{r}}, \Gamma_{44}^1 = \frac{M}{r^2} e^{-\frac{4M}{r}} \quad (51).$$

Bestimmung von $\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = m_0 r^2 \dot{\vartheta} \quad (52).$$

Bestimmung von $\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}$:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = m_0 r^2 \ddot{\vartheta} + 2m_0 r \dot{r} \dot{\vartheta} \quad (53).$$

Bestimmung von $\frac{\partial L}{\partial \vartheta}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \vartheta} = m_0 r^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \dot{\varphi}^2 \quad (54).$$

Bestimmung der Lagrange-Gleichung:

$$r^2 \ddot{\vartheta} + 2r \dot{r} \dot{\vartheta} - r^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \dot{\varphi}^2 = 0 \quad (55),$$

$$\ddot{\vartheta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\vartheta} - \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \dot{\varphi}^2 = 0 \quad (56).$$

Die Christoffel-Symbole sind:

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \Gamma_{33}^2 = -\sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \quad (57).$$

Bestimmung von $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_0 r^2 \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi} \quad (58).$$



Bestimmung von $\frac{d}{d\tau} \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}$:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = 2m_0 r \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi} + 2m_0 r^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \dot{\vartheta} \dot{\varphi} + m_0 r^2 \sin^2(\vartheta) \ddot{\varphi} \quad (59).$$

Bestimmung von $\frac{\partial L}{\partial \varphi}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (60).$$

φ ist wieder eine zyklische Koordinate und es gilt der entsprechende Erhaltungssatz für den Drehimpuls.

Bestimmung der Lagrange-Gleichung:

$$2m_0 r \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi} + 2m_0 r^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \dot{\vartheta} \dot{\varphi} + m_0 r^2 \sin^2(\vartheta) \ddot{\varphi} = 0 \quad (61),$$

nach Division durch $m_0 r^2 \sin^2(\vartheta)$ folgt:

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} + 2 \cot(\vartheta) \dot{\vartheta} \dot{\varphi} = 0 \quad (62).$$

Die Christoffel-Symbole sind:

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot(\vartheta) \quad (63).$$

Bestimmung von $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^4}$:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^4} = -m_0 \dot{x}^4 e^{-\frac{2M}{r}} \quad (64).$$

Bestimmung von $\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^4}$:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^4} = -m_0 e^{-\frac{2M}{r}} \ddot{x}^4 - m_0 2 \frac{M}{r^2} e^{-\frac{2M}{r}} \dot{x}^4 \quad (65)$$

Bestimmung von $\frac{\partial L}{\partial x^4}$:

$$\frac{\partial L}{\partial x^4} = 0 \quad (66),$$



x^4 ist wieder zyklisch und es gilt der Energieerhaltungssatz.

Bestimmung der Lagrange-Gleichung:

$$m_0 e^{-\frac{2M}{r}} \ddot{x}^4 + m_0 2 \frac{M}{r^2} e^{-\frac{2M}{r}} \dot{x}^4 = 0 \quad (67),$$

und nach Division durch $m_0 e^{-\frac{2M}{r}}$ folgt:

$$\ddot{x}^4 + 2 \frac{M}{r^2} \dot{x}^4 = 0 \quad (68).$$

Die Christoffel-Symbole sind:

$$\Gamma_{14}^4 = \Gamma_{41}^4 = \frac{M}{r^2} \quad (69)$$



Übersicht

Für die weiteren Rechnungen, für Vergleichszwecke und, um der Übersichtlichkeit Willen geben wir die folgende zusammenfassende Übersicht über die bisherigen Terme an.

Tabelle 1: Metrische Tensorkomponenten

Metrische Tensorkomponenten	Einstein	Post-Einstein
g_{11}	$\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}$	$e^{\frac{2M}{r}}$
g_{22}	r^2	r^2
g_{33}	$r^2 \sin^2(\vartheta)$	$r^2 \sin^2(\vartheta)$
g_{44}	$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$	$-e^{-\frac{2M}{r}}$



Tabelle 2: Grenzwerte der Tensorkomponenten g_{ii} an den Unstetigkeitsstellen⁵ der Schwarzschild-Metrik

Metrische Tensorkomponenten	Einstein	Post-Einstein
g_{11}	$\lim_{r \rightarrow 0} g_{11} = -0$ $\lim_{r^+ \rightarrow 2M} g_{11} = +\infty$ $\lim_{r^- \rightarrow 2M} g_{11} = -\infty$	$\lim_{r \rightarrow 0} g_{11} = +\infty$ $\lim_{r^+ \rightarrow 2M} g_{11} = +e^{+1}$ $\lim_{r^- \rightarrow 2M} g_{11} = +e^{+1}$
g_{22}	$\lim_{r \rightarrow 0} g_{22} = +0$ $\lim_{r^+ \rightarrow 2M} g_{22} = +4M^2$ $\lim_{r^- \rightarrow 2M} g_{22} = +4M^2$	$\lim_{r \rightarrow 0} g_{22} = +0$ $\lim_{r^+ \rightarrow 2M} g_{22} = +4M^2$ $\lim_{r^- \rightarrow 2M} g_{22} = +4M^2$
g_{33}	$\lim_{r \rightarrow 0} g_{33} = +0$ $\lim_{r^+ \rightarrow 2M} g_{33} = +4M^2 \sin^2(\mathcal{G})$ $\lim_{r^- \rightarrow 2M} g_{33} = +4M^2 \sin^2(\mathcal{G})$	$\lim_{r \rightarrow 0} g_{33} = +0$ $\lim_{r^+ \rightarrow 2M} g_{33} = +4M^2 \sin^2(\mathcal{G})$ $\lim_{r^- \rightarrow 2M} g_{33} = +4M^2 \sin^2(\mathcal{G})$
g_{44}	$\lim_{r \rightarrow 0} g_{44} = +\infty$ $\lim_{r^+ \rightarrow 2M} g_{44} = -0$ $\lim_{r^- \rightarrow 2M} g_{44} = +0$	$\lim_{r \rightarrow 0} g_{44} = -0$ $\lim_{r^+ \rightarrow 2M} g_{44} = -e^{-1}$ $\lim_{r^- \rightarrow 2M} g_{44} = -e^{-1}$

Tabelle 3: Grenzwerte der Tensorkomponenten g_{ii} für $r \rightarrow \infty$

Metrische Tensorkomponenten	Einstein	Post-Einstein
g_{11}	$\lim_{r \rightarrow 0} g_{11} = +1$	$\lim_{r \rightarrow 0} g_{11} = +1$
g_{22}	$\lim_{r \rightarrow 0} g_{22} = +\infty$	$\lim_{r \rightarrow 0} g_{22} = +\infty$
g_{33}	$\lim_{r \rightarrow 0} g_{33} = +\infty$	$\lim_{r \rightarrow 0} g_{33} = +\infty$
g_{44}	$\lim_{r \rightarrow 0} g_{44} = -1$	$\lim_{r \rightarrow 0} g_{44} = -1$

⁵ Die Symbolik r^+ hat die Bedeutung, dass man sich bei der Grenzwertbetrachtung von außen und bei r^- von innen her dem Schwarzschild-Radius nähert. Das Vorzeichen der Null symbolisiert das Vorzeichen des Christoffel-Symbols in der Nähe der Grenze.



Tabelle 4: Bewegungsgleichung zur r -Koordinate, repräsentiert durch die zugehörigen Symbole

Christoffel-Symbole	Einstein	Post-Einstein
Γ_{11}^1	$-\frac{\frac{2M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}}$	$-\frac{M}{r^2}$
Γ_{22}^1	$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)r$	$-re^{\frac{2M}{r}}$
Γ_{33}^1	$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)r \sin^2(\vartheta)$	$-r \sin^2(\vartheta)e^{\frac{2M}{r}}$
Γ_{44}^1	$\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\frac{M}{r^2}$	$\frac{M}{r^2}e^{\frac{4M}{r}}$

Tabelle 5: Bewegungsgleichung zur ϑ -Koordinate, repräsentiert durch die zugehörigen Symbole

Christoffel-Symbole	Einstein	Post-Einstein
$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$	$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{r}$
Γ_{33}^2	$-\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)$	$-\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)$

Tabelle 6: Bewegungsgleichung zur φ -Koordinate, repräsentiert durch die zugehörigen Symbole

Christoffel-Symbole	Einstein	Post-Einstein
$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3$	$\frac{1}{r}$	$\frac{1}{r}$
$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3$	$\cot(\vartheta)$	$\cot(\vartheta)$



Tabelle 7: Bewegungsgleichung zur x^4 -Koordinate, repräsentiert durch die zugehörigen Symbole

Christoffel-Symbole	Einstein	Post-Einstein
$\Gamma_{14}^4 = \Gamma_{41}^4$	$\frac{\frac{M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}}$	$\frac{M}{r^2}$

Tabelle 8: Grenzwerte der Christoffel-Symbole Γ_{kk}^1 zu den Metriken an den Unstetigkeitsstellen der Schwarzschild-Metrik

Christoffel-Symbole	Einstein	Post-Einstein
Γ_{11}^1	$\lim_{r \rightarrow 0} \Gamma_{11}^1 = +\infty$ $\lim_{r^+ \rightarrow 2M} \Gamma_{11}^1 = -0, \lim_{r^- \rightarrow 2M} \Gamma_{11}^1 = +0$	$\lim_{r \rightarrow 0} \Gamma_{11}^1 = -\infty,$ $\lim_{r^+ \rightarrow 2M} \Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{4M}, \lim_{r^- \rightarrow 2M} \Gamma_{11}^1 = -\frac{1}{4M}$
Γ_{22}^1	$\lim_{r \rightarrow 0} \Gamma_{22}^1 = 2M$ $\lim_{r^+ \rightarrow 2M} \Gamma_{22}^1 = -0, \lim_{r^- \rightarrow 2M} \Gamma_{22}^1 = +0$	$\lim_{r \rightarrow 0} \Gamma_{22}^1 = -\infty$ $\lim_{r^+ \rightarrow 2M} \Gamma_{22}^1 = -2Me^{+1}, \lim_{r^- \rightarrow 2M} \Gamma_{22}^1 = -2Me^{+1}$
Γ_{33}^1	$\lim_{r \rightarrow 0} \Gamma_{33}^1 = 2M \sin^2(\vartheta)$ $\lim_{r^+ \rightarrow 2M} \Gamma_{33}^1 = -0, \lim_{r^- \rightarrow 2M} \Gamma_{33}^1 = +0$	$\lim_{r \rightarrow 0} \Gamma_{33}^1 = -0$ $\lim_{r^+ \rightarrow 2M} \Gamma_{33}^1 = -2Me^{-1}, \lim_{r^- \rightarrow 2M} \Gamma_{33}^1 = -2Me^{-1}$
Γ_{44}^1	$\lim_{r \rightarrow 0} \Gamma_{44}^1 = -\infty$ $\lim_{r^+ \rightarrow 2M} \Gamma_{44}^1 = +0$ $\lim_{r^- \rightarrow 2M} \Gamma_{44}^1 = -0$	$\lim_{r \rightarrow 0} \Gamma_{44}^1 = +0$ $\lim_{r^+ \rightarrow 2M} \Gamma_{44}^1 = \frac{1}{4M} e^{-2}$ $\lim_{r^- \rightarrow 2M} \Gamma_{44}^1 = \frac{1}{4M} e^{-2}$



Tabelle 9: Grenzwerte der Christoffel-Symbole Γ_{ik}^2 zu den Metriken an den Unstetigkeitsstellen der Schwarzschild-Metrik

Christoffel-Symbole	Einstein	Post-Einstein
$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$	$\lim_{r \rightarrow 0} \Gamma_{12}^2 = +\infty$ $\lim_{r^+ \rightarrow 2M} \Gamma_{12}^2 = +2M$ $\lim_{r^- \rightarrow 2M} \Gamma_{12}^2 = +2M$	$\lim_{r \rightarrow 0} \Gamma_{12}^2 = +\infty$ $\lim_{r^+ \rightarrow 2M} \Gamma_{12}^2 = +2M,$ $\lim_{r^- \rightarrow 2M} \Gamma_{12}^2 = +2M$
Γ_{33}^2	stets: $-\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)$	stets: $-\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)$

Tabelle 10: Grenzwerte der Christoffel-Symbole Γ_{ik}^3 zu den Metriken an den Unstetigkeitsstellen der Schwarzschild-Metrik

Christoffel-Symbole	Einstein	Post-Einstein
$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3$	$\lim_{r \rightarrow 0} \Gamma_{13}^3 = +\infty$ $\lim_{r^+ \rightarrow 2M} \Gamma_{13}^3 = +2M$ $\lim_{r^- \rightarrow 2M} \Gamma_{13}^3 = +2M$	$\lim_{r \rightarrow 0} \Gamma_{13}^3 = +\infty$ $\lim_{r^+ \rightarrow 2M} \Gamma_{13}^3 = +2M$ $\lim_{r^- \rightarrow 2M} \Gamma_{13}^3 = +2M$
$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3$	stets: $\cot(\vartheta)$	stets: $\cot(\vartheta)$

Tabelle 11: Die Grenzwerte der Christoffel-Symbole Γ_{ik}^4 zu den Metriken an den Unstetigkeitsstellen der Schwarzschild-Metrik

Christoffel-Symbole	Einstein	Post-Einstein
$\Gamma_{14}^4 = \Gamma_{41}^4$	$\lim_{r \rightarrow 0} \Gamma_{14}^4 = +\infty,$ $\lim_{r^+ \rightarrow 2M} \Gamma_{14}^4 = +0$ $\lim_{r^- \rightarrow 2M} \Gamma_{14}^4 = -0$	$\lim_{r \rightarrow 0} \Gamma_{14}^4 = +\infty,$ $\lim_{r^+ \rightarrow 2M} \Gamma_{14}^4 = +\frac{1}{4M}$ $\lim_{r^- \rightarrow 2M} \Gamma_{14}^4 = +\frac{1}{4M}$



Tabelle 12: Grenzwerte der Christoffel-Symbole Γ_{kk}^1 für $r \rightarrow \infty$

Christoffel-Symbole	Einstein	Post-Einstein
Γ_{11}^1	$\lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma_{11}^1 = -0$	$\lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma_{11}^1 = -0,$
Γ_{22}^1	$\lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma_{22}^1 = -\infty$	$\lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma_{22}^1 = -\infty$
Γ_{33}^1	$\lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma_{33}^1 = -\infty$	$\lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma_{33}^1 = -\infty$
Γ_{44}^1	$\lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma_{44}^1 = +0$	$\lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma_{44}^1 = +0$

Tabelle 13: Grenzwerte der Christoffel-Symbole Γ_{ik}^2 für $r \rightarrow \infty$

Christoffel-Symbole	Einstein	Post-Einstein
$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2$	$\lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma_{12}^2 = +0$	$\lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma_{12}^2 = +0$
Γ_{33}^2	stets: $-\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)$	stets: $-\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)$

Tabelle 14: Grenzwerte der Christoffel-Symbole Γ_{ik}^3 für $r \rightarrow \infty$

Christoffel-Symbole	Einstein	Post-Einstein
$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3$	$\lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma_{13}^3 = +0$	$\lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma_{13}^3 = +0$
$\Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3$	stets: $\cot(\vartheta)$	stets: $\cot(\vartheta)$



Tabelle 15: Die Grenzwerte der Christoffel-Symbole Γ_{ik}^4 für $r \rightarrow \infty$

Christoffel-Symbole	Einstein	Post-Einstein
$\Gamma_{14}^4 = \Gamma_{41}^4$	$\lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma_{14}^4 = +0$	$\lim_{r \rightarrow \infty} \Gamma_{14}^4 = +0$

Berechnung der Newtonschen Bewegungsgleichungen und Vergleiche

Für Vergleichszwecke und die Interpretation berechnen wir noch die Bewegungsgleichungen auf Basis der Newtonschen Gravitationstheorie im Lagrange-Formalismus. Die Lagrange-Funktion ist dann gegeben durch die Gleichung:

$$L = m_0 \frac{1}{2} \dot{x}^2 + m_0 \frac{1}{2} \dot{y}^2 + m_0 \frac{1}{2} \dot{z}^2 + m_0 \frac{\gamma M}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (70).$$

Dabei sind x, y, z die kartesischen Koordinaten und $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ die zugehörigen Geschwindigkeiten. Der Koordinatenursprung soll mit der punktförmig gedachten Zentralmasse zusammenfallen. Auf Grund der unendlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wirkung ist die Eigenzeit identisch mit der Koordinatenzeit, es gilt:

$$d\tau = dt \quad (71).$$

Führen wir wieder Kugelkoordinaten gemäß (2) ein, so folgt für die Geschwindigkeiten:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \dot{r} \cos(\varphi) \sin(\vartheta) - r \sin(\varphi) \sin(\vartheta) \dot{\varphi} + r \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \dot{\vartheta} \\ \dot{y} &= \dot{r} \sin(\varphi) \sin(\vartheta) + r \cos(\varphi) \sin(\vartheta) \dot{\varphi} + r \sin(\varphi) \cos(\vartheta) \dot{\vartheta} \\ \dot{z} &= \dot{r} \cos(\vartheta) - r \sin(\vartheta) \dot{\vartheta} \end{aligned} \quad (72).$$

und nach fleißiger Rechnung oder kurzer Internetrecherche findet man

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 \quad (73).$$

Die Lagrange-Funktion (70) erhält dann mit Hilfe von (73) die Form:

$$L = m_0 \frac{1}{2} \dot{r}^2 + m_0 \frac{1}{2} r^2 \dot{\vartheta}^2 + m_0 \frac{1}{2} r^2 \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 + m_0 \frac{\gamma M_0}{r} \quad (74).$$

Es lohnt sich, die Lagrange-Funktion (74) mit den Lagrange-Funktionen (10) und (11), oder mit (14) und (45) zu vergleichen. Für $M_0 = 0$, bzw. $M = 0$ werden alle Lagrange-Funktionen identisch. Man sieht daher auch beispielhaft, dass die Gravitation in der Relativistik anders implementiert wird, als in der



Newtonschen Physik. Die Physik gemäß (74) findet in einem ungekrümmten Raum statt, auch bleibt die Zeit von der Gravitation völlig unberührt (absolut), d.h., auch die Trägheit ist absolut⁶. Nun zur Herleitung der Bewegungs-Gleichungen!

Bestimmung der Lagrange-Gleichungen aus (74):

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \quad (75),$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m_0 \ddot{r} \quad (76),$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m_0 r \dot{\vartheta}^2 + m_0 r \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 - m_0 \frac{\gamma M_0}{r^2} \quad (77),$$

das ergibt die erste Lagrange-Gleichung:

$$\ddot{r} - r \dot{\vartheta}^2 - r \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 = -\frac{\gamma M_0}{r^2} \quad (78),$$

wobei wir die Gravitationskraft auf die rechte Seite geschrieben haben, weil sie in der klassischen Physik keine geometrische Größe ist, sie stört die eigentliche geodätische Bewegung, die durch die kraftfreie Gleichung:

$$\ddot{r} - r \dot{\vartheta}^2 - r \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi}^2 = 0 \quad (79),$$

beschrieben wird. Herleitung der zweiten Lagrange-Gleichung:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = m_0 r^2 \dot{\vartheta} \quad (80),$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}} = m_0 2r\dot{r}\dot{\vartheta} + m_0 r^2 \ddot{\vartheta} \quad (81).$$

Die zweite Lagrange-Gleichung ist damit:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{2}{r} \dot{r}\dot{\vartheta} - 2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \dot{\varphi}^2 = 0 \quad (82).$$

Herleitung der dritten und damit letzten Lagrange-Gleichung:

⁶ Die Trägheit determiniert die Zeitmessung, nicht umgekehrt – will sagen, die Dinge werden nicht träger, weil die Zeit langsamer fließt, sondern wenn die Trägheit in einem Bezugssystem wächst, verlangsamen sich alle Bewegungen in dem System so, als würde die Zeit langsamer vergehen. Ohne zu verstehen, was primär und was sekundär ist, kann die gesamte Relativistik nicht verstanden werden. Einstein hat völlig zu Recht über die g_{ik} 's als Trägheitsfeld gesprochen, was über den Tatbestand, dass der metrische Tensor die Raum-Zeit repräsentiert oft vergessen wird.



$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_0 r^2 \sin^2(\vartheta) \dot{\varphi} \quad (83),$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_0 2r \sin^2(\vartheta) \dot{r} \dot{\varphi} + m_0 r^2 2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \dot{\vartheta} \dot{\varphi} + m_0 r^2 \sin^2(\vartheta) \ddot{\varphi} \quad (84),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \quad (85),$$

denn φ ist eine zyklische Koordinate. Die letzte Lagrange-Gleichung ist somit:

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\varphi} + 2 \cot(\vartheta) \dot{\vartheta} \dot{\varphi} = 0 \quad (86).$$

Hier zeigt sich, dass es sinnvoll war, auch den nicht-relativistischen Fall einmal in dieser Form zu behandeln, weil so erkennbar wird, welche Größen auch in dem Fall der euklidischen Geometrie auftreten und welche Größen etwas mit der tatsächlichen Deformation der Metrik im relativistischen Fall zu tun haben. Einiges haben wir bereits beim Vergleich der Lagrange-Funktionen gesehen, Einiges sehen wir jetzt, wenn wir die Christoffel-Symbole des klassischen Falls notieren, und sie mit den relativistischen Fällen (Einstein, Post-Einstein) vergleichen.

Tabelle 16: Vergleich der Christoffel-Symbole Γ_{kk}^i für die räumlichen Komponenten

Newton-Gravitation	Einstein	Post-Einstein
$\Gamma_{11}^1 = 0$	$\Gamma_{11}^1 = -\frac{\frac{2M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}}$	$\Gamma_{11}^1 = -\frac{M}{r^2}$
$\Gamma_{22}^1 = -r$	$\Gamma_{22}^1 = -r \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$	$\Gamma_{22}^1 = -r e^{\frac{2M}{r}}$
$\Gamma_{33}^1 = -r \sin^2(\vartheta)$	$\Gamma_{33}^1 = -r \sin^2(\vartheta) \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$	$\Gamma_{33}^1 = -r \sin^2(\vartheta) e^{\frac{2M}{r}}$
$\Gamma_{33}^2 = -\sin(\vartheta) \cos(\vartheta)$	$\Gamma_{33}^2 = -\sin(\vartheta) \cos(\vartheta)$	$\Gamma_{33}^2 = -\sin(\vartheta) \cos(\vartheta)$



Tabelle 17: Vergleich der Christoffel-Symbole $\Gamma_{ik}^m = \Gamma_{ki}^m$ für die räumlichen Komponenten

Newton-Gravitation	Einstein	Post-Einstein
$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}$	$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}$	$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}$
$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}$	$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}$	$\Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}$
$\Gamma_{23}^3 = \cot(\vartheta)$	$\Gamma_{23}^3 = \cot(\vartheta)$	$\Gamma_{23}^3 = \cot(\vartheta)$

Der Vergleich der von Null verschiedenen räumlichen Christoffel-Symbole zeigt uns Folgendes:

1. In der Newtonschen Gravitationstheorie hat die Gravitation keinen Einfluss auf die Geometrie, alle Newtonschen Christoffel-Symbole⁷ sind unabhängig von der Zentralmasse, und deshalb unabhängig vom Gravitationsfeld.
2. In den relativistischen Metriken bewirkt die Gravitation nur bei den Christoffel-Symbolen eine Modifikation gegenüber dem klassischen Fall, wenn die unteren Indizes identisch sind und zugleich der obere Index den Wert 1 hat. Letzteres liegt an der Radialsymmetrie des Problems und der Koordinatenwahl, denn der Index 1 steht ja für die Radiuskoordinate.
3. Während das zur Schwarzschild-Metrik gehörige Christoffel-Symbol Γ_{11}^1 eine komplizierte Struktur mit einer Singularität bei $r = 2M$ besitzt, weist das entsprechende Christoffel-Symbol zur Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik exakt die Struktur des Newtonschen Gravitationsgesetzes auf⁸.
4. **Grenzfälle:** Geht die Zentralmasse gegen Null ($M_0 \rightarrow 0$) oder der Abstand gegen unendlich ($r \rightarrow \infty$), so herrschen stets euklidische Verhältnisse vor, die Bewegung der Testmasse m_0 wird geradlinig und gleichförmig, gemäß Newtons erstem Axiom. Der Unterschied der relativistischen Metriken zur klassischen Newtonschen Metrik (klassischer dreidimensionaler euklidischer Raum) besteht darin, dass die relativistischen Metriken in die speziell-relativistische Minkowski-Metrik übergehen.

⁷ Wir erinnern daran, dass in der Riemannschen Geometrie die Christoffel-Symbole durch den Metrischen Tensor und dessen Derivierte gemäß $\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{lk} (g_{ik,j} + g_{jk,i} - g_{ij,k})$ definiert sind – die durch den metrischen Tensor bestimmte Geometrie wirkt sich daher auch auf die Christoffel-Symbole aus.

⁸ Bei der Aufstellung der Einstein'schen Feldgleichungen verfolgte Einstein das Ziel, eine maximale Nähe zur Newtonschen Gravitationstheorie zu erreichen. Hier haben wir einen Hinweis, dass ihm das nicht gelungen ist, dass es möglich ist, eine noch größere Nähe zu sichern.



5. Für $r = 0$ und $r > 0$ treten allein im Falle der Schwarzschild-Metrik Singularitäten auf⁹, die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik verhält sich stets regulär.

Korrespondierende klassische Gravitationsgesetze

Der Zusammenhang zwischen Newtonschem Gravitationsgesetz und Allgemeiner Relativitätstheorie kann direkt aus der Schwarzschild-Metrik abgelesen werden¹⁰. Gemäß (5) gilt:

$$g_{44} = -\left(1 - \frac{2\gamma M_0}{c^2 r}\right) \quad (87).$$

Mit dem Newtonschen Gravitationspotential

$$U(r) = -\frac{\gamma M_0}{r} \quad (88)$$

lesen wir aus (87)

$$g_{44} = -\left(1 + \frac{2U(r)}{c^2}\right) \quad (89)$$

ab. Stellen wir diese Beziehung nach dem Gravitationspotential um, dann finden wir:

$$U = -\frac{c^2}{2}(1 + g_{44}) \quad (90).$$

Übertragen wir die Beziehung zwischen klassischem Gravitationspotential und g_{44} auf die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik, dann lautet das korrespondenzmäßig dieser Metrik zugeordnete Gravitationspotential:

$$\tilde{U} = -\frac{c^2}{2}\left(1 - e^{-\frac{2\gamma M_0}{c^2 r}}\right) \quad (91).$$

Die dem Gravitationspotential (91) zugeordnete Feldstärke ist dann:

$$\vec{\tilde{G}} = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\gamma M_0}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} e^{-\frac{2\gamma M_0}{c^2 r}} = -\frac{\gamma M_0}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \left(1 - \frac{2\gamma M_0}{c^2 r} + \frac{1}{2}\left(\frac{2\gamma M_0}{c^2 r}\right)^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{2\gamma M_0}{c^2 r}\right)^3 + \dots\right) \quad (92).$$

⁹ Der Fall des frei fallenden Beobachters wird hier nicht behandelt. Das oft als Einwand vorgetragene Argument, dass für einen frei fallenden Beobachter am Schwarzschild-Radius nichts Besonderes passiert, ist nicht ganz richtig, denn unterschreitet er einmal diese Grenze, kann er in den äußeren Bereich, also in den freien Raum, nicht mehr zurück. In der Post-Einstein-Metrik würde er dagegen niemals in eine so prekäre Situation kommen.

¹⁰ Hier wird vorausgesetzt, dass das Gravitationsfeld schwach genug ist, dass die räumliche Krümmung bereits vernachlässigbar ist.



Sowohl die Beziehung (91), als auch (92) sind physikalisch von grundlegender Bedeutung. Das betrifft die Fundamentalstruktur der Gravitation in superdichten Materiezuständen und die kosmologischen Konsequenzen. Zunächst zeigt ein Blick auf (91), dass das Gravitationspotential in zwei Terme zerfällt:

$$\check{U} = -\frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2} e^{-\frac{2\gamma M_0}{c^2 r}} \quad (93).$$

Der erste Term in (93) ist vollkommen ortsunabhängig, dieser Term ist im gesamten Universum gleich. Warum ist das so?¹¹ Für den Grenzwert $r \rightarrow \infty$ nimmt das Gravitationspotential exakt den konstanten Wert

$$\check{U}_\infty = 0 \quad (94)$$

an. Das klassische mit der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik korrespondierende Gravitationspotential \check{U} verhält sich im räumlich Unendlichen genauso, wie das Newtonsche Gravitationspotential, es verschwindet. Doch es verschwindet nicht gemäß der Proportionalität $\propto \frac{1}{r}$, es verhält sich nichtlinear gemäß (93). Wir erinnern hier zunächst nur daran, dass in der klassischen Physik ein unendlicher Kosmos mit einer endlichen homogenen Massendichte auf ein divergierendes kosmisches Gravitationspotential führt. Das ist der Inhalt des Gravitationsparadoxons und Entsprechendes gilt auch für die Gravitationskraft. Vor diesem Hintergrund hat es historisch Versuche gegeben, das Newtonsche Gravitationsgesetz zu modifizieren. Neumann (1870) fügte dem Newtonschen Potential eine abstandsabhängige Exponentialfunktion hinzu, welches dem Raum die Fähigkeit zugeschrieben hat, das Potential zu schwächen:

$$U_{\text{Neumann}} = -\frac{\gamma M_0}{r} e^{-kr} \quad (95),$$

nach Seeliger (1895) würde dagegen der Kraftfluss, ähnlich wie Strahlung, in einem Medium geschwächt:

¹¹ Ein konstantes Potential beeinflusst die Bewegung normalerweise nicht. Darum ist es bei einem klassischen Potential möglich, eine andere Eichung des Potentials vorzunehmen, z.B. würde auch das Potential

$\check{U}^* = \frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2} e^{-\frac{2\gamma M_0}{c^2 r}}$ dieselben Bewegungsgleichungen liefern. Dieses Potential hätte für $r \rightarrow \infty$ den Grenzwert

$\check{U}_\infty^* = c^2$ und an der Stelle $r = 0$ hätte es den Wert $\check{U}_0^* = \frac{c^2}{2}$. Wird nun die Beziehung (89) für das Potential \check{U}^*

benutzt, dann folgt nach Einsetzen $g_{44} = -\left(2 + e^{-\frac{2\gamma M_0}{c^2 r}}\right)$. Der Grenzwert $r \rightarrow \infty$ ist dann $\check{g}_{44}^\infty = -3$, statt

$g_{44}^\infty = -1$. Wir erkennen, dass eine Umeichung des Potentials mit der Umeichung der Trägheit korreliert. Um das zu

verstehen, müssen wir uns nur an die Definition der kinetischen Energie erinnern: $E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} g_{ik} \dot{x}^i \dot{x}^k$. Wir sehen

hier eine relativistische Korrespondenz zwischen Trägheitsdefinition und Gravitationspotential und sehen uns zugleich an das Machsche Prinzip erinnert.



$$\vec{G}_{Seeliger} = -\frac{\gamma M_0}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} e^{-kr} \quad (96).$$

Formt man (92) etwas um:

$$\vec{G} = -\frac{\gamma M_0}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} e^{-\frac{2|U|}{c^2}} \quad (97),$$

so ist zu erkennen, dass die Exponentialfunktion eine Selbstabschwächung der Gravitation beschreibt. Ein unendliches Gravitationspotential $|U| = \infty$ würde die Gravitationskraft unterdrücken. Wir erkennen das beispielhaft an dem Grenzübergang¹²:

$$\lim_{r \rightarrow 0} -\frac{\gamma M_0}{r^2} e^{-\frac{2\gamma M_0}{c^2 r}} = 0 \quad (98).$$

Tatsächlich wird im Unterschied zur Newtonschen Gravitation eine Singularität der Kraft sogar an der Stelle $r = 0$ verhindert. Wir sehen an der Beziehung (93), dass der Betrag für das Gravitationspotential

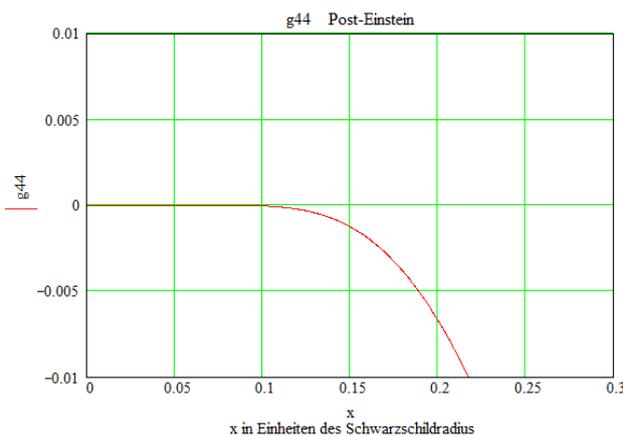


Abbildung 1: Für $r=0$ geht die g_{44} -Komponente der Post-Einstein-Metrik gegen Null, d.h. sie verhält sich ähnlich, wie die Schwarzschild-Metrik am Schwarzschild-Radius.

nie größer als $\frac{c^2}{2}$ werden kann. Erst die klassische Grenzwertbildung $c \rightarrow 0$ führt auf die klassische Polstelle, sie führt aber auch auf das Gravitationsparadoxon der Newtonschen Gravitationstheorie. Mit anderen Worten befreit die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik sowohl die Relativistik, als auch den quasi-klassischen Grenzfall vom Singularitätsproblem überhaupt! Ganz unabhängig von der Frage, ob der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik Realität zukommt, macht allein ihre Untersuchung darauf aufmerksam, dass das klassische Gravitationsparadoxon nicht, wie behauptet, durch die Allgemeine Relativitätstheorie

überwunden wurde. Es lebt in ihr als Singularitätsproblem fort, welches seinen Grund letztlich in der Nichtabschirmbarkeit der Newtonschen Gravitation hat, d.h. der Grund liegt im Newtonschen Gravitationsgesetz. Aber eine Abschirmung oder Selbstabschirmung der Gravitation muss eine fundamentale Folge für die gesamte Kosmologie und Astrophysik, speziell für superdichte

¹² Für die Grenzwertbildung haben wir den Grenzwertsatz von l' Hospital $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ doppelt

angewendet. Wir haben gerechnet: $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{A}{r^2} e^{-\frac{B}{r}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{Ax^2}{e^{Bx}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2Ax}{Be^{Bx}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2A}{B^2 e^{2Bx}} = \frac{2A}{B^2} \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-2Bx} = 0$, da

$B = \frac{2\gamma M_0}{c^2} > 0$ gilt.



Materiezustände haben, falls die wirkliche Natur der Gravitation auf diese Weise korrekt erfasst ist. Betrachten wir weiter den vollständig klassischen Grenzfall von (92), d.h., führen wir den Grenzübergang $c \rightarrow \infty$ durch, so finden wir exakt das Newtonsche Gravitationsgesetz

$$G_{Newton} = \lim_{c \rightarrow \infty} \left(-\frac{\gamma M_0}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} e^{-\frac{2\gamma M_0}{c^2 r}} \right) = -\frac{\gamma M_0}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad (99),$$

wie aus der Reihenentwicklung von (92) direkt abgelesen werden kann.

Eine weitere Betrachtung von (97) macht deutlich, dass das Potential in die Bewegungsgleichungen unmittelbar eingeht – was sich auch bei einer genauen Betrachtung der entsprechenden Christoffel-Symbole zeigt. Damit wird die Eichfreiheit des Potentials gebrochen und dem Potential kommt eine direkte physikalische Bedeutung zu. Das ist jedoch keine Besonderheit der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik, sondern der Relativistik überhaupt, Entsprechendes lässt sich auch bei der Schwarzschild-Metrik feststellen, wenn wir die Christoffel-Symbole in Tabelle 16 betrachten.

Planetenbewegung im Newtonschen Gravitationsfeld

Die Gesetzmäßigkeiten für die Bewegung im klassischen Newtonschen Gravitationsfeld sind durch die Lagrange-Funktion (70), bzw. (74) festgelegt, sie führen auf die Bewegungsgleichungen (79), (82) und (86). Diese Bewegungsgleichungen legen die Bewegung bis auf die Anfangsbedingungen für Ort und Impuls eindeutig fest. Doch zur Lösung des Bewegungsproblems ist es nicht erforderlich die Bewegungsgleichungen zu integrieren, da die Koordinate φ eine zyklische Koordinate ist und demzufolge der Drehimpulserhaltungssatz gilt. Ebenso geht die Zeit nicht explizit in die Lagrange-Funktion ein, und das bedeutet Energieerhaltung. Beide Erhaltungssätze stellen bereits Integrale der Bewegung dar, und können für die Lösung des Bewegungsproblems herangezogen werden. Auf Grund der Möglichkeit das Koordinatensystem frei wählen und frei orientieren zu können, vereinfacht sich die Lagrange-Funktion (74), wenn wir

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \quad (100)$$

wählen, die Bewegung erfolgt dann gemäß (2) allein in der x-y-Ebene. Diese Reduzierung ist auf Grund der Drehimpulserhaltung gerechtfertigt. Entsprechend ist

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0 \quad (101),$$

und die Lagrange-Funktion (74) reduziert sich auf:

$$L = m_0 \frac{1}{2} \dot{r}^2 + m_0 \frac{1}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 + m_0 \frac{\gamma M_0}{r} \quad (102).$$



Der verallgemeinerte Drehimpuls ist durch (83) gegeben, und aufgrund von (100) und (101) fällt der verallgemeinerte Drehimpuls p_φ mit dem Drehimpuls D_z und dem Gesamtdrehimpuls D zusammen:

$$D_z = D = p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m_0 r^2 \dot{\varphi} = \text{const.} \quad (103).$$

Der Ausdruck (103) ist sehr einfach interpretierbar, wenn wir diesen etwas umformen:

$$D = 2m_0 \frac{1}{2} \vec{r} \cdot \vec{r} \frac{d\varphi}{dt} \quad (104).$$

In (104) ist

$$\dot{f} = \frac{1}{2} \vec{r} \cdot \frac{\vec{r} d\varphi}{dt} \quad (105)$$

die Flächengeschwindigkeit, und wegen der Drehimpulserhaltung ist diese Geschwindigkeit konstant. Es gilt der Flächensatz: Der Radiusvektor des sich bewegenden Teilchens überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (zweites Keplersches Gesetz). Um das Bewegungsproblem zu lösen, gehen wir mit (104) in den Ausdruck für die Energie ein. Dazu stellen wir (104) zunächst nach $\dot{\varphi}$ um und quadrieren, dann erhalten wir:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{D^2}{m_0^2 r^4} \quad (106).$$

Das wird in (104) für $\dot{\varphi}^2$ eingesetzt und es folgt:

$$E = \frac{m_0}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - m_0 \frac{\gamma M_0}{r} = \frac{m_0}{2} \dot{r}^2 + \frac{D^2}{2m_0 r^2} - m_0 \frac{\gamma M_0}{r} \quad (107).$$

In der Beziehung (107) stehen zwei Erhaltungsgrößen, die Energie E und der Drehimpuls D . Sie sind die Parameter der Bewegung. Wir stellen nun (107) nach der Geschwindigkeit um:

$$\dot{r}^2 = \frac{2E}{m_0} - \frac{D^2}{m_0^2 r^2} + \frac{2\gamma M_0}{r} \quad (108)$$

und das ergibt schließlich:

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m_0} - \frac{D^2}{m_0^2 r^2} + \frac{2\gamma M_0}{r}} \quad (109),$$

mit

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} \quad (110).$$



Die beiden Vorzeichen in (109) sind von physikalischer Bedeutung. Das positive Vorzeichen steht für die Bewegung, welche das Entfernen vom Zentralgestirn beschreibt, das negative Vorzeichen beschreibt die Annäherung. Man muss aber beachten, dass es sich nicht um eine Bewegung handelt, welche entlang einer raumfesten geometrischen Verbindungslinie zwischen Planet und Zentralgestirn verläuft, sondern dass sich im Verlauf der Bewegung auch die Winkelkoordinate verändert – aus unserem Allgemeinwissen ist schon klar, dass die Bewegung auf einer raumfesten Ellipsenbahn stattfindet, wir wollen aber die mathematische Beschreibung untersuchen. Da die rechte Seite von (109) nur von der Koordinate r abhängig ist, lassen sich die Variablen trennen:

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m_0} - \frac{D^2}{m_0^2 r^2} + \frac{2\gamma M_0}{r}} \quad (111),$$

wir erhalten die Form:

$$\pm \frac{1}{\sqrt{\frac{2E}{m_0} - \frac{D^2}{m_0^2 r^2} + \frac{2\gamma M_0}{r}}} dr = dt \quad (112)$$

und können integrieren (ohne die Vorzeichen mitzunehmen, die den unterschiedlichen Fällen zuzuordnen sind):

$$\int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m_0} - \frac{D^2}{m_0^2 r^2} + \frac{2\gamma M_0}{r}}} = t - t_0 \quad (113).$$

Ganz analog kann auch eine Trennung der Variablen für die Beziehung (103) vorgenommen werden.

Zunächst stellen wir (103) nach $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt}$ um:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{D}{m_0 r^2} \quad (114).$$

Das ergibt:

$$d\varphi = \frac{D}{m_0 r^2} dt \quad (115),$$

und damit haben wir das Integral:

$$\varphi = \int \frac{D}{m_0 r^2} dt + \varphi_0 \quad (116),$$

wobei φ_0 über die Anfangsbedingungen festgelegt wird. Verwenden wir für das Differential dt die Beziehung (112), dann überführen wir dadurch die Beziehung (116) in die Beziehung:



$$\varphi = \int \frac{\frac{D}{m_0 r^2} dr}{\sqrt{\frac{2E}{m_0} - \frac{D^2}{m_0^2 r^2} + \frac{2\gamma M_0}{r}}} + \varphi_0 \quad (117).$$

Die Beziehung (117) ordnet jedem Abstand einen bestimmten Winkel zu, wobei die Winkel zyklisch durchlaufen werden.

Das effektive Potential der Newtonschen Planetenbewegung

Betrachten wir noch einmal die Beziehung (107), so kann der Term:

$$U_{\text{eff}} = \frac{D^2}{2m_0 r^2} - m_0 \frac{\gamma M_0}{r} \quad (118)$$

als effektives Potential betrachtet werden. Die Größe $\frac{D^2}{2m_0 r^2}$ heißt Zentrifugalpotential¹³. Zur Analyse der Bewegung hinsichtlich der Radialkoordinate ist die Untersuchung von (118) von Bedeutung. Wir erkennen unter der Voraussetzung eines nicht verschwindenden Drehimpulses:

$$D \neq 0 \quad (119),$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} U_{\text{eff}}(r) = +\infty \quad (120),$$

das bedeutet, dass der Abstand zum Zentrum nie ein bestimmtes Minimum unterschreiten kann. Die Trägheit wirkt hier wie eine übermächtige Abstoßungskraft. Leiten wir das effektive Potential nach r ab und setzen wir die Ableitung Null:

$$\frac{dU_{\text{eff}}}{dr} = -\frac{D^2}{m_0 r^3} + m_0 \frac{\gamma M_0}{r^2} = 0 \quad (121).$$

Aus (121) folgt, dass das effektive Potential U_{eff} bei

$$r_{\text{ext}} = \frac{D^2}{\gamma m_0^2 M_0} \quad (122)$$

einen Extremwert hat. Da die zweite Ableitung

$$\frac{d^2 U_{\text{eff}}}{dr^2} = 3 \frac{D^2}{m_0 r^4} - 2m_0 \frac{\gamma M_0}{r^3} \quad (123)$$

¹³ Vergleiche L. D. Landau, E. M. Lifschitz, Lehrbuch der Theoretischen Physik, Band I, „Mechanik“, Akademie Verlag Berlin, 1981, Seite 38.



nach dem Einsetzen von (122) in (123) auf

$$\frac{d^2 U_{\text{eff}}}{dr^2} = \frac{\gamma^4 m_0^7 M^4}{D^6} > 0 \quad (124)$$

führt, ergibt sich, dass es sich bei r_{ext} um ein Minimum handelt:

$$r_{\text{Min}} = r_{\text{ext}} \quad (125).$$

Am Minimum beträgt der Wert von U_{eff} :

$$U_{\text{eff}}(r_{\text{Min}}) = -\frac{\gamma m_0^3 M_0^2}{2D^2} < 0 \quad (126).$$

Weiterhin geht das effektive Potential für einen unendlichen Abstand gegen Null:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U_{\text{eff}}(r) = 0 \quad (127),$$

d.h. es wächst ab seinem tiefsten Wert bei $r = r_{\text{Min}}$ für $r > r_{\text{Min}}$ allmählich wieder an, wird aber nie positiv. Zusammengefasst hat das Effektive Potential bei $r = 0$ eine positive Polstelle, es fällt vom positiv Unendlichen auf ein negatives Minimum gemäß (126) ab, um sich schließlich mit wachsendem Abstand asymptotisch gegen Null zu bewegen. Auf Grund dieser Eigenschaft des Effektiven Potentials lassen sich zwei Bewegungen unterscheiden. Für $E < 0$ ist die Bewegung finit, der Planet ist gravitativ an das Zentralgestirn gebunden. Für $E \geq 0$ kann der Planet ins Unendliche entweichen, seine Bewegung ist infinit.

Finite Bewegungen im Newtonschen Zentralfeld

Bei einer finiten Bewegung ist der Bewegungsbereich begrenzt. Die Begrenzung des Bewegungsbereiches kann berechnet werden. An den Umkehrpunkten der Bewegung wird die Radialgeschwindigkeit Null:

$$\dot{r} = 0 \quad (128).$$

Unterwerfen wir also die Beziehung (108) oder (109) der Bedingung (128), dann finden wir die Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$r_1 = -\frac{\gamma m_0 M_0}{2E} + \sqrt{\left(\frac{\gamma m_0 M_0}{2E}\right)^2 + \frac{D^2}{2m_0 E}} \quad (129),$$

$$r_2 = -\frac{\gamma m_0 M_0}{2E} - \sqrt{\left(\frac{\gamma m_0 M_0}{2E}\right)^2 + \frac{D^2}{2m_0 E}} \quad (130).$$

Setzen wir eine finite Bewegung voraus, dann können wir



$$E = -|E| \quad (131)$$

setzen. Damit überführen wir die Gleichungen (129) und (130) in die besser interpretierbaren Formen:

$$r_{Aphel} = r_1 = + \frac{\gamma m_0 M_0}{2|E|} + \sqrt{\left(\frac{\gamma m_0 M_0}{2E}\right)^2 - \frac{D^2}{2m_0|E|}} \quad (132),$$

$$r_{Perihel} = r_2 = + \frac{\gamma m_0 M_0}{2|E|} - \sqrt{\left(\frac{\gamma m_0 M_0}{2E}\right)^2 - \frac{D^2}{2m_0|E|}} \quad (133).$$

Entsprechend der astronomischen Terminologie haben wir den größten Abstand mit *Aphel* und den kleinsten Abstand des Planeten mit dem Wort *Perihel* indiziert. Aus dem Wurzelausdruck in (132), bzw. (133) ist die Bedingung

$$\left(\frac{\gamma m_0 M_0}{2E}\right)^2 = \frac{D^2}{2m_0|E|} \quad (134)$$

ablesbar, aus ihr folgt die Kreisbahnbedingung:

$$E = - \frac{\gamma^2 m_0^3 M_0^2}{2D^2} \quad (135).$$

Ist die Energie kleiner als nach (135), so werden die Lösungen komplexwertig, d.h. der kleinstmögliche Abstand zum Zentralgestirn ist durch:

$$r_{Kreisbahn} = \frac{D^2}{\gamma m_0^2 M_0} \quad (136)$$

gegeben, wir haben hier (135) in (133) eingesetzt. Gemäß (106) ist die Winkelgeschwindigkeit durch

$$\dot{\phi} = \pm \frac{D}{m_0 r^2} \quad (137)$$

mit dem Abstand r verknüpft. Wir erhalten die Winkelgeschwindigkeit für die Kreisbahn, indem wir (136) in (137) einsetzen:

$$\dot{\phi}_{Kreisbahn} = \pm \frac{\gamma^2 m_0^3 M_0^2}{D^3} \quad (138).$$

Für die Winkelgeschwindigkeit im Aphel finden wir unter Verwendung von (132) und (137) die Beziehung



$$\dot{\varphi}_{\text{Aphel}} = \frac{\frac{D}{m_0}}{\left(\frac{\gamma M_0}{2|E|} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\gamma m_0 M_0}{E} \right)^2 + \frac{2D^2}{m_0 M_0}} \right)^2} \quad (139),$$

und für das wichtige Perihel schließlich:

$$\dot{\varphi}_{\text{Perihel}} = \frac{\frac{D}{m_0}}{\left(\frac{\gamma M_0}{2|E|} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\gamma m_0 M_0}{E} \right)^2 + \frac{2D^2}{m_0 M_0}} \right)^2} \quad (140).$$

Integrieren¹⁴ wir nun die Beziehung (117), so erhalten wir die Lösung:

$$\varphi = \arccos \left(\frac{\frac{D}{r} - \frac{\gamma m_0^2 M_0}{D}}{\sqrt{2m_0 E + \frac{\gamma^2 m_0^4 M_0^2}{D^2}}} \right) + \varphi_0 \quad (141).$$

In (141) ist der Winkel φ_0 die Integrationskonstante. Die Beziehung (141) ordnet jedem Abstand einen Winkel zu. Da die Winkelgeschwindigkeit nie ihr Vorzeichen ändert, wird insgesamt eine Bahn um den Zentralkörper beschrieben. Um die Form der Bahn – wir wissen das ist eine Ellipse – zu erkennen, bilden wir $\cos(\varphi - \varphi_0)$:

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{\frac{D}{r} - \frac{\gamma m_0^2 M_0}{D}}{\sqrt{2m_0 E + \frac{\gamma^2 m_0^4 M_0^2}{D^2}}} \quad (142).$$

Mittels einiger einfacher Umformungen können wir (142) auf die Form einer Ellipsengleichung bringen:

$$\begin{aligned} \sqrt{2m_0 E + \frac{\gamma^2 m_0^4 M_0^2}{D^2}} \cos(\varphi - \varphi_0) &= \frac{D}{r} - \frac{\gamma m_0^2 M_0}{D} \\ \frac{\gamma m_0^2 M_0}{D} + \sqrt{2m_0 E + \frac{\gamma^2 m_0^4 M_0^2}{D^2}} \cos(\varphi - \varphi_0) &= \frac{D}{r} \\ 1 + \frac{D}{\gamma m_0^2 M_0} \sqrt{2m_0 E + \frac{\gamma^2 m_0^4 M_0^2}{D^2}} \cos(\varphi - \varphi_0) &= \frac{D^2}{\gamma m_0^2 M_0} \frac{1}{r} \end{aligned} \quad (143).$$

Setzen wir:

¹⁴ Die nicht ganz unaufwendige Lösung des Integrals ist im Anhang A vorgerechnet.



$$p = \frac{D^2}{\gamma m_0^2 M_0} \quad (144),$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2ED^2}{\gamma^2 m_0^3 M_0^2}}$$

so folgt die Ellipsengleichung:

$$1 + e \cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{p}{r} \quad (145).$$

Die Größe e bezeichnet man als Exzentrizität und p schlicht als Parameter. Mit der freien Wahl des Anfangswertes $\varphi_0 = 0$ orientieren wir unser Koordinatensystem so, dass der minimale Abstand des Planeten zum Zentrum mit dem Beginn der Bewegung zusammenfällt. Für $\varphi_0 = 0$ befindet sich der Planet im Perihel.

Um die Umlaufzeit zu bestimmen, ist es nicht erforderlich, mit dem komplizierten Integral (113) zu operieren. Zum Glück steht uns der Flächensatz, d.h. das 2. Keplersche Gesetz (105) zur Verfügung. Die Fläche einer Ellipse ist durch

$$A = \pi \cdot a \cdot b \quad (146)$$

gegeben, wobei die Größen a und b die Halbachsen der Ellipse sind.

Aus (104) und (105) lesen wir

$$\dot{f} = \frac{D}{2m_0} = \text{konst.} \quad (147)$$

ab. Die Umlaufzeit T ist die Zeit, in der die gesamte Fläche der Ellipse überstrichen wird. Da die Flächengeschwindigkeit konstant ist, kann

$$\dot{f} = \frac{D}{2m_0} = \frac{A}{T} \quad (148)$$

gesetzt werden und daraus ergibt sich für die Umlaufzeit eines Planeten:

$$T = \frac{2m_0 A}{D} = \frac{2m_0 \pi a b}{D} \quad (149).$$

Wir benötigen noch die Halbachsen. Die große Halbachse a ist einfach die Summe:

$$a = \frac{1}{2}(r_{\text{Aphel}} + r_{\text{Perihel}}) = \frac{\gamma m_0 M_0}{2|E|} \quad (150).$$

Die Halbachse b verschaffen wir uns über die Beziehung zwischen Halbachsen und Exzentrizität:



$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \quad (151),$$

daraus ergibt sich:

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \quad (152).$$

Füllen wird diese geometrische Beziehung ebenfalls mit gravitativem Leben, so folgt:

$$b = D \sqrt{\frac{1}{2m_0|E|}} \quad (153).$$

Die Fläche der Ellipse ist somit:

$$A = \pi \cdot a \cdot b = \pi \cdot \frac{\gamma m_0 M_0}{2|E|} \cdot \frac{D}{\sqrt{2m_0|E|}} = \gamma \cdot \pi \cdot D \cdot M_0 \cdot \sqrt{\frac{m_0}{8|E|^3}} \quad (154).$$

Für die Umlaufzeit ergibt sich dann gemäß (149) endgültig¹⁵:

$$T = \frac{2m_0}{D} \cdot A = \gamma \cdot \pi \cdot M_0 \cdot \sqrt{\frac{m_0^3}{2|E|^3}} \quad (155).$$

Die Umlaufzeit (155) ist entsprechend unserer Herleitung die Zeit für eine komplette Umkreisung des Zentralkörpers, d.h. in ihr wird der Gesamtwinkel $\varphi = 2\pi$ durchlaufen und zugleich die komplette Fläche der Ellipse überstrichen. Auf Grund der Axialsymmetrie der Ellipse gilt in Bezug auf die Beziehung (113) für die Bewegung vom Perihel zum Aphel:

$$\int_{r_{\text{Perihel}}}^{r_{\text{Aphel}}} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m_0} - \frac{D^2}{m_0^2 r^2} + \frac{2\gamma M_0}{r}}} = \frac{1}{2} T \quad (156).$$

Betrachtet man einen kompletten Umlauf als eine Bewegung von Perihel zu Perihel, so fällt eine solcher Umlauf in der Regel nicht mit einem Umlaufwinkel von $\varphi = 2\pi$ zusammen. Im Falle einer so genannten Rosettenbahn, sind die Kurven nach einem Winkel von 2π nicht geschlossen.

¹⁵ Die Formel (155) suggeriert einen Einfluss der Testmasse auf die Umlaufzeit, was einen direkten Widerspruch zum Äquivalenzprinzip darstellen würde, aber betrachtet man die Beziehung (107), dann ist die Proportionalität $E \propto m_0$ und darum kürzte sich in Wahrheit die Testmasse m_0 aus der Gleichung (154) heraus und das Äquivalenzprinzip gilt exakt – die Umlaufzeit hängt nicht von der Testmasse ab!



Periheldrehung im Newtonschen Zentralfeld

Das Perihel kann je nach Fall der durch 2π charakterisierten Position voraus- oder hinterhereilen. Den jeweils positiven oder negativen Versatz des Perihels von Umlauf zu Umlauf bezeichnet man als Periheldrehung

$$\delta = \Delta\varphi - 2\pi \quad (157),$$

mit:

$$: \Delta\varphi = 2 \int_{r_{\text{Perihel}}}^{r_{\text{Aphel}}} \frac{\frac{D}{m_0 r^2} dr}{\sqrt{\frac{2E}{m_0} - \frac{D^2}{m_0^2 r^2} + \frac{2\gamma M_0}{r}}} \quad (158).$$

Der Faktor 2 in (158) trägt der Tatsache Rechnung, dass wegen der Eindeutigkeit der Zuordnungen $r \rightarrow \varphi$ gemäß (141) und $r \rightarrow \dot{\varphi}$ gemäß (137), der durchlaufene Winkel von Perihel zum Aphel der gleiche ist, wie der vom Aphel zum Perihel. Aufgrund der Tatsache, dass wir in einem raumfesten Koordinatensystem eine Ellipse als Lösung der Bewegungsgleichung erhalten haben, ist die Ellipse selbst raumfest, damit ist auch das Perihel raumfest und es gilt:

$$\delta = \Delta\varphi - 2\pi = 0 \quad (159).$$

Das ist eine Eigenschaft des Newtonschen Gravitationspotentials, für welches die Proportionalität $\propto \frac{1}{r}$ gilt. Die Bewegung beschreibt eine geschlossene Kurve. Nur im Falle des räumlichen Oszillators, dessen Potential die Proportionalität $\propto r^2$ erfüllt, existieren ebenfalls geschlossene Bahnen, und das bedeutet, dass bereits das Gravitationsgesetz (97), des quasi-klassischen Grenzfalles der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik auf eine Periheldrehung führen muss. Spannend ist die Frage, ob bereits diese quasi-klassische Näherung die Einstein'sche Periheldrehung enthält. Das würde bedeuten, dass die Periheldrehung mit einer quasi-klassischen Theorie beschreibbar wäre, die eine Selbstabschirmung der Schwerkraft einschließt und bei der gerade der Abschirmungsfaktor diese Periheldrehung determiniert. Die sich daraus ergebenden theoretischen Implikationen wären dann eben auch nicht ganz uninteressant. Wir haben erste Ergebnisse im Anhang E dargestellt. Demnach ist eine Anwendung des Potentials des quasi-klassischen Grenzfalles unter der Bedingung einer Newtonschen absoluten Raum-Zeit problematisch, da die entscheidenden Terme sich nicht nur um einen quantitativen Faktor, sondern qualitativ unterscheiden. Die Zulässigkeit einer solchen Näherung bedarf weiterer Untersuchungen.



Planetenbewegung in der Schwarzschild-Metrik

Zur Beschreibung der Planetenbewegung spezialisieren wir die Schwarzschild-Metrik (5) entsprechend der Festlegung (Koordinatenwahl / Anfangsbedingung) (100), d.h. $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, sowie (101), d.h. $\dot{\vartheta} = 0$, (vergleiche Seite 24). Unter diesen Bedingungen führt auch die Bewegungsgleichung (56) auf $\ddot{\vartheta} = 0$:

$$\begin{aligned} \ddot{\vartheta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\vartheta} - \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \dot{\varphi}^2 &= 0 \\ \ddot{\vartheta} + \frac{2}{r} \dot{r} \cdot 0 - \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \dot{\varphi}^2 &= 0 \\ \ddot{\vartheta} + 0 + 1 \cdot 0 &= 0 \\ \ddot{\vartheta} &= 0 \end{aligned} \tag{160}.$$

Wie im Falle der klassischen Planetenbewegung erfolgt die komplette Bewegung ausschließlich in der $x - y$ -Ebene, und damit vereinfacht sich die Lagrange-Funktion (14) zu:

$$L = \frac{m_0}{2} \left[\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} (\dot{r})^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (\dot{x}^4)^2 \right] \tag{161}.$$

Genau wie im klassischen Fall sind auch φ und x^4 zyklische Koordinaten, weil sie in der Lagrange-Funktion gar nicht auftreten. Aus diesem Grunde gelten ebenfalls der Drehimpulserhaltungssatz und der Energieerhaltungssatz¹⁶:

$$r^2 \dot{\varphi} = B \tag{162},$$

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dct}{d\tau} = A \tag{163}.$$

Hatten wir im klassischen Fall die Gleichung für die Gesamtenergie (104) verwendet, um eine Gleichung für die Bewegung zu finden – ohne auf die Lagrange-Gleichungen zurückgreifen zu müssen, so verwenden wir hier die Definitionsgleichung für die Eigenzeit:

¹⁶ Wir halten uns zum Zwecke der Vergleichbarkeit der Rechnungen an die Nomenklatur aus dem Lehrbuch „Allgemeine Relativitätstheorie“, Hans Stephani, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980. Um die Beziehungen mit dem klassischen Fall vergleichen zu können, sind aber die folgenden Korrespondenzen zu

berücksichtigen: $D = m_0 B$ (vergleiche mit (137)), sowie $M_0 = \frac{Mc^2}{\gamma}$ (vergleiche mit (5)). Weiter erinnern wir

darin, dass die durch Punktierung gekennzeichneten Ableitungen, Ableitungen nach der Eigenzeit τ sind, und dass in der klassischen Physik Eigenzeit und Koordinatenzeit zusammenfallen, d.h. $t = \tau$.



$$\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dct}{d\tau}\right)^2 = -c^2 \quad (164),$$

welche ebenfalls als ein erstes Integral der Bewegungsgleichungen angesehen werden kann. In (164) substituieren wir unter Nutzung der Erhaltungssätze (162) und (163):

$$\frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \dot{r}^2 + \frac{B^2}{r^2} - \frac{A^2}{1 - \frac{2M}{r}} = -c^2 \quad (165).$$

Stellen wir (165) nach \dot{r} um, dann erhalten wir:

$$\dot{r} = \sqrt{A^2 - c^2 + \frac{2Mc^2}{r} - \frac{B^2}{r^2} + \frac{2MB^2}{r^3}} \quad (166).$$

Diese Gleichung lässt sich durch Trennung der Variablen in das Integral:

$$\tau - \tau_0 = \int \frac{dr}{\sqrt{A^2 - c^2 + \frac{2Mc^2}{r} - \frac{B^2}{r^2} + \frac{2MB^2}{r^3}}} \quad (167)$$

überführen. Führen wir die Korrespondenzen lt. Fußnote Nummer 16 ein

$$\tau - \tau_0 = \int \frac{dr}{\sqrt{A^2 - c^2 + \frac{2\gamma M_0}{r} - \frac{D^2}{m_0^2 r^2} + \frac{2\gamma D^2}{M_0 c^2 r^3}}} \quad (168),$$

so sehen wir den Zusammenhang, sowie die Unterschiede zum klassischen Fall (113), hier der klassische Fall noch einmal zum Vergleich in gleicher Term-Reihenfolge:

$$t - t_0 = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m_0} + \frac{2\gamma M_0}{r} - \frac{D^2}{m_0^2 r^2}}} \quad (113).$$

Der Term im Nenner von (168), der die Proportionalität $\propto \frac{1}{r^3}$ aufweist, bewirkt eine Abweichung der Bahn von einer geschlossenen Ellipsenbahn, d.h. von einer raumfesten Ellipse. Dieser Term generiert eine Periheldrehung.

Wir wollen nun die Beziehung $\varphi(r)$, also die Bahngleichung zu bestimmen. Dazu stellen wir (162) nach der Winkelgeschwindigkeit um:

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{B}{r^2} \quad (169),$$



daraus folgt:

$$d\varphi = \frac{B}{r^2} d\tau \quad (170).$$

Aus der Beziehung (166) erhalten wir:

$$d\tau = \frac{dr}{\sqrt{A^2 - c^2 + \frac{2Mc^2}{r} - \frac{B^2}{r^2} + \frac{2MB^2}{r^3}}} \quad (171).$$

Das Einsetzen von (171) in (170) liefert uns die gesuchte Bahngleichung:

$$\varphi = \int \frac{\frac{B}{r^2} dr}{\sqrt{A^2 - c^2 + \frac{2Mc^2}{r} - \frac{B^2}{r^2} + \frac{2MB^2}{r^3}}} + \varphi_0 \quad (172).$$

Das effektive Potential zur Schwarzschild-Metrik

Die Gleichung (172) ist die analoge Beziehung zu (117), und ganz dem entsprechend können wir auch hier ein effektives Potential ablesen:

$$\tilde{U}_{\text{eff}} = -\frac{2Mc^2}{r} \alpha + \frac{B^2}{r^2} \alpha - \frac{2MB^2}{r^3} \alpha \quad (173).$$

Verwenden wir die Korrespondenzbeziehungen der Fußnote 14, so ergibt sich:

$$\tilde{U}_{\text{eff}} = -\frac{2\gamma M_0}{r} \alpha + \frac{D^2}{m_0^2 r^2} \alpha - \frac{2\gamma D^2}{M_0 c^2 r^3} \alpha \quad (174).$$

Die Größe α ist ein erforderlicher Faktor, um die Korrespondenz zum klassischen Newtonschen Fall herzustellen. Durch den Vergleich mit (117) oder mit (118) erkennen wir $\alpha = \frac{m_0}{2}$. Definieren wir noch eine korrespondierende Energie \tilde{E} :

$$\frac{2\tilde{E}}{m_0} = A^2 - c^2 \quad (175),$$

so können wir die weiteren Untersuchungen ähnlich dem klassischen Fall durchführen, formal tritt dann an die Stelle der Bahngleichung (172) die Gleichung:



$$\varphi = \int \frac{\frac{B}{r^2} dr}{\sqrt{m_0 + \frac{2\tilde{E}}{r} - \frac{D^2}{m_0^2 r^2} + \frac{2\gamma D^2}{M_0 c^2 r^3}}} + \varphi_0 \quad (176).$$

Sie ist das Analogon zur Bahngleichung (117) der Newtonschen Bewegung. Es ist aber zu beachten, dass die Energie \tilde{E} eine relativistische Energie ist.

Die korrespondierende Gleichung für das effektive Potential lautet dann:

$$\tilde{U}_{\text{eff}} = -\frac{\gamma m_0 M_0}{r} + \frac{D^2}{2m_0 r^2} - \frac{\gamma m_0 D^2}{M_0 c^2 r^3} \quad (177).$$

Sie ist das Analogon zur Gleichung (118), wie man leicht sieht. Wir diskutieren nun den Verlauf des effektiven Potentials (177).

Für $r \rightarrow 0$ geht das Einstein-Schwarzschildsche effektive Potential gegen Minus unendlich:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \tilde{U}_{\text{eff}} = -\infty \quad (178).$$

Bereits das ist ein signifikanter Unterschied zum klassischen Newtonschen effektiven Potential, vergleiche mit (120), denn der Drehimpuls konnte im klassischen Fall auf Grund seiner Proportionalität $\propto +\frac{1}{r^2}$ verhindern, dass eine Masse sich beliebig dem Zentrum annähern kann, da das Newtonsche Potential nur die Proportionalität $\propto -\frac{1}{r}$ besitzt. Der Drehimpuls funktioniert gewissermaßen wie ein unüberwindlicher

Potentialwall. Doch der Einstein-Schwarzschildsche Zusatzterm $-\frac{\gamma m_0 D^2}{M_0 c^2 r^3}$ besitzt die Proportionalität $\propto -\frac{1}{r^3}$ und ist für beliebig kleine Abstände „stärker“ als der positive Drehimpulsterm. Der Zusatzterm

kann überhaupt nur für $c \rightarrow \infty$ verschwinden.

Derselbe Term, welcher für die Periheldrehung sorgt, ist offensichtlich auch dafür verantwortlich, dass es eine kritische Distanz gibt, deren Unterschreitung verhindert, dass die Trägheitskräfte ausreichen, die Gravitation zu kompensieren - wenn man den Sachverhalt so in der Sprache der klassischen Physik ausdrücken möchte. Die Einstein'sche Gravitationstheorie (ART) lässt eine Übermacht der Gravitation zu. Das ist eine andere Ausdrucksweise für das Singularitätsproblem der ART. Dem gegenüber verhält sich das Potential für große Abstände gemäß:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{U}_{\text{eff}} = U_{\text{eff}} \quad (179),$$

d.h., es verhält sich zunehmend klassisch – auch gilt für diesen Fall $\tilde{E} \rightarrow E$.

Wir untersuchen nun die Extremstellen des effektiven Potentials, wobei wir wegen des geringeren Schreibaufwandes (173) benutzen. Die Korrespondenz zu den klassischen Formen erzeugen wir nur, falls



es uns sinnvoll erscheint. Der Faktor α fällt sowieso durch das Nullsetzen der ersten Ableitung weg, d.h., wir können einfach:

$$\frac{d\tilde{U}_{\text{eff}}}{dr} = \frac{2Mc^2}{r^2} - \frac{B^2}{r^3} + \frac{2MB^2}{r^4} = 0 \quad (180)$$

schreiben. Nach kurzer Rechnung finden wir:

$$r_{\tilde{U}-\text{Max}} = \frac{B^2}{4Mc^2} - \sqrt{\left(\frac{B^2}{4Mc^2}\right)^2 - 2MB^2} \quad (181),$$

$$r_{\tilde{U}-\text{Min}} = \frac{B^2}{4Mc^2} + \sqrt{\left(\frac{B^2}{4Mc^2}\right)^2 - 2MB^2}$$

wobei die Voraussetzung:

$$\left(\frac{B^2}{4Mc^2}\right)^2 - 2MB^2 > 0 \quad (182)$$

erfüllt sein muss, damit die beiden Radien Extremstellen repräsentieren. Aus (182) kann die äquivalente Bedingung:

$$B^2 > 16M^3c^4 \quad (183)$$

ermittelt werden. Gilt dagegen:

$$B^2 = 16M^3c^4 \quad (184),$$

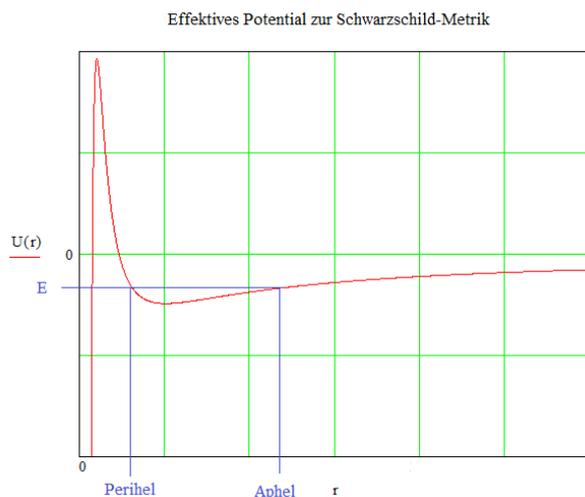


Abbildung 2: Qualitativer Verlauf des mit der Schwarzschild-Metrik korrespondierenden effektiven Potentials.

dann liegt mathematisch ein Sattelpunkt des

effektiven Potentials vor. Da $B = \frac{D}{m_0}$ gilt, gibt es in

der ART offensichtlich einen kritischen Drehimpulsbetrag, der durch (184) definiert ist.

Die konkrete formale Bestimmung der Extremwerte des effektiven Potentials führt auf schlecht interpretierbare platzgreifende Formeln. Um sie zu erhalten, wäre nur (176) in (173) einzusetzen. Wir verzichten darauf und stellen hier nur fest, dass im Planetensystem unserer Sonne der Einstein'sche Term so klein ist, dass er als kleine Störung aufgefasst werden kann, und das bedeutet, dass zumindest unter den Verhältnissen im Sonnensystem im Wesentlichen alle Aussagen aus

dem Newtonschen Fall gelten, die wir bezüglich der Energie E sowie der Unterscheidung zwischen finiten



und infiniten Bewegungen getroffen haben. Um für die Größen $r_{Perihel}$ und r_{Aphel} die reguläre Planetenbewegung zu bestimmen, setzen wir voraus, dass sich der Planet rechtsseitig des Maximums des effektiven Potentials bewegen kann (Abbildung 2). Die Gleichung (177) können wir leicht umformen:

$$\tilde{U}_{eff} = -\frac{\gamma m_0 M_0}{r} + \frac{D^2}{2m_0 r^2} \left(1 - \frac{2\gamma m_0^2}{M_0 c^2 r} \right) \quad (185).$$

Diese leicht veränderte Form zeigt zunächst, warum der Drehimpuls unter der Voraussetzung $r < r_{\tilde{U}-Max}$ die Gravitation nicht mehr kompensieren kann, weil er sowohl in den anziehenden, als auch abstoßenden Term proportional eingeht. Ab einem bestimmten kritischen Radius wirkt sogar der Drehimpuls nicht mehr abstoßend. Der kritische Radius r_{krit} lässt sich aus der Bedingung:

$$0 = 1 - \frac{2\gamma m_0^2}{M_0 c^2 r} \quad (186)$$

herleiten, und er ist:

$$r_{krit} = \frac{2\gamma m_0^2}{M_0 c^2} \quad (187).$$

Für diesen Radius ist der Drehimpuls ausgeblendet, es wirkt die reine Newtonsche Gravitation. Wird der Abstand vom Zentrum noch kleiner, wirkt der Drehimpuls selbst anziehend. Vergleichen wir (187) mit dem Schwarzschild-Radius r_s , so finden wir das Verhältnis:

$$\frac{r_{krit}}{r_s} = \frac{2m_0^2}{M_0} \ll 1 \quad (188).$$

Offensichtlich ist dieser Radius deutlich kleiner als der Schwarzschild-Radius, trotzdem reicht seine Existenz aus, um einen minimalen Abstand zum Zentrum zu verhindern. Er verweist aber auch darauf, dass sich die geometrischen Verhältnisse grundlegend verändert haben. Seine Existenz ist, wie die Existenz des Schwarzschild-Radius, selbst Bestandteil des Singularitätsproblems der ART.

Am Schwarzschild-Radius:

$$r_s = \frac{2\gamma M_0}{c^2} \quad (189)$$

hat das effektive Potential den Wert:

$$\tilde{U}_{eff}(r_s) = -\frac{m_0}{2} c^2 + \frac{1}{8} \frac{D^2 c^4}{\gamma^2 m_0 M_0^2} \left(1 - \frac{m_0^2}{M_0^2} \right) \quad (190).$$

Aus Sicht des frei fallenden Beobachters, oder des hineinstürzenden Planeten, passiert am Schwarzschild-Radius scheinbar nichts Weltbewegendes. Nur der weit entfernte Beobachter, für den die Koordinatenzeit mit seiner Eigenzeit annähernd zusammenfällt, erscheint ein Prozess, in dem ein Planet den



Schwarzschild-Radius unterschreitet, als unendlich gedehnt. Wir müssen aber beachten, dass wir die Bewegung nicht nach der Koordinatenzeit beurteilen, sondern nach der Eigenzeit des Planeten. Entsprechend sind die punktierten Zeitableitungen stets Ableitungen nach der Eigenzeit gewesen.

Finite Bewegungen in der Schwarzschild-Metrik

Doch dies war eine Abschweifung, wesentlich für unsere Untersuchung ist die Tatsache, dass wir Bewegungen weit außerhalb des Schwarzschild-Radius untersuchen und, weil die Grundbedingung der Schwarzschild-Metrik $M_0 \gg m_0$ gilt, ist der Einstein'sche Zusatzterm, der für die Periheldrehung verantwortlich ist, wegen der Größe der Sonnenmasse und der ungeheuren Größe der Lichtgeschwindigkeit stets als sehr klein vor auszusetzen. Das begründet die in Abbildung 2 dargestellte Potentialform. Wir bestimmen nun r_{in} , $r_{Perihel}$ und r_{Aphel} . Der Radius r_{in} ist der linksseitig vom Potentialmaximum zu findende Maximalradius. Alle drei Radien sind Umkehrpunkte der Bewegung. Aus diesem Grunde gilt $\dot{r} = 0$. Wir setzen daher die Gleichung (166) Null:

$$0 = \sqrt{A^2 - c^2 + \frac{2Mc^2}{r} - \frac{B^2}{r^2} + \frac{2MB^2}{r^3}} \quad (191),$$

damit ist auch:

$$A^2 - c^2 + \frac{2Mc^2}{r} - \frac{B^2}{r^2} + \frac{2MB^2}{r^3} = 0 \quad (192).$$

Die Beziehung (192) führt auf ein Polynom 3. Grades. Die Lösung ergibt sich mit den Parametern

$$p = -\frac{4M^2c^4}{|A^2 - c^2|^2} + \frac{B^2}{|A^2 - c^2|} \quad (193),$$

$$q = -\frac{16}{27} \frac{M^3c^6}{|A^2 - c^2|^3} + \frac{2}{3} \frac{Mc^2B^2}{|A^2 - c^2|^2} - \frac{2MB^2}{|A^2 - c^2|}$$

sowie

$$\phi = \arccos \left(\frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3}} \right) \quad (194)$$

zu:



$$\begin{aligned}
 r_1 &= 2\sqrt{\frac{|p|}{3}} \cos\left(\frac{\phi}{3}\right) + \frac{2}{3} \frac{Mc^2}{|A^2 - c^2|} \\
 r_2 &= -2\sqrt{\frac{|p|}{3}} \cos\left(\frac{\phi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{2}{3} \frac{Mc^2}{|A^2 - c^2|} \\
 r_3 &= -2\sqrt{\frac{|p|}{3}} \cos\left(\frac{\phi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{2}{3} \frac{Mc^2}{|A^2 - c^2|}
 \end{aligned}
 \tag{195},$$

Die Herleitung ist im Anhang B zu finden. Statt einer umfangreichen Auswertung der Ausdrücke (195) erscheint es uns einfacher, die konkreten Werte für den Planeten Merkur auszurechnen. Auf Grund der Ergebnisse kann dann entschieden werden, welcher Radius welche Bedeutung hat. Für den sich quasi-klassisch verhaltenden Planeten Merkur sollte ungefähr:

$$|A^2 - c^2| \approx \frac{2|E|}{m_0} = 2.29268836490628 \cdot 10^9 \frac{m^2}{s^2}
 \tag{196}$$

gelten. Die Berechnung ist im Anhang C dokumentiert. Die konkrete Berechnung in dieser Näherung für den Planeten Merkur ergibt das folgende Resultat:

r_1 in [m]:= 6.98164158492763E+0010 ist das Aphel des Merkur.

r_2 in [m]:= 2.95443042302132E+0003 in der Nähe des Schwarzschild-Radius der Sonne.

r_3 in [m]:= 4.59999913392629E+0010 ist das Perihel des Merkur.

Das bedeutet:

$$\begin{aligned}
 r_{Aphle} &= 2\sqrt{\frac{|p|}{3}} \cos\left(\frac{\phi}{3}\right) + \frac{2}{3} \frac{Mc^2}{|A^2 - c^2|} \\
 r_{in} &= -2\sqrt{\frac{|p|}{3}} \cos\left(\frac{\phi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{2}{3} \frac{Mc^2}{|A^2 - c^2|} \\
 r_{Perihel} &= -2\sqrt{\frac{|p|}{3}} \cos\left(\frac{\phi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{2}{3} \frac{Mc^2}{|A^2 - c^2|}
 \end{aligned}
 \tag{197).$$

Der Radius r_{in} scheint einfach der Schwarzschild-Radius r_S zu sein¹⁷. Da die Lösungsstrategie der kubischen Gleichung ein goniometrisches Element enthalten hat, verschleiert vielleicht die Lösung der kubischen Gleichung eine einfache quadratische Form? Wenn der Schwarzschild-Radius eine Lösung der kubischen Gleichung ist, dann könnten wir durch Abspaltung dieser Lösung die kubische Gleichung auf eine quadratische Gleichung reduzieren und dadurch einfachere Ausdrücke für Aphel und Perihel im relativistischen Fall erhalten. Wir müssen also zunächst prüfen, ob der Schwarzschild-Radius tatsächlich

¹⁷ Einstein setzt in seinem berühmten Sitzungsbericht vor der Berliner Akademie der Wissenschaften am 18.11.1915 tatsächlich $r_{in} = r_S$, ohne das weiter zu erläutern.



eine allgemeine Lösung der kubischen Gleichung darstellt. Zu diesem Zweck formen wir die Gleichung (192) leicht um, indem wir nach den Parametern sortieren und ausklammern:

$$\begin{aligned}
 A^2 + B^2 \left(\frac{2M}{r^3} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{2Mc^2}{r} - c^2 &= 0 \\
 A^2 - B^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{1}{r^2} - c^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) &= 0 \quad (198). \\
 A^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(\frac{B^2}{r^2} - c^2 \right) &= 0
 \end{aligned}$$

Setzen wir nun $r = r_s = 2M$ in die Gleichung (198) ein, so folgt offensichtlich:

$$A^2 - \left(1 - \frac{2M}{2M} \right) \left(\frac{B^2}{2M} - c^2 \right) = A^2 = 0 \quad (199).$$

Wir sehen, dass der Schwarzschild-Radius überhaupt nur für $A^2 = 0$ eine Lösung der Gleichung (192) darstellt. Ohnehin kann der Merkur nicht zum Schwarzschild-Radius vordringen, weil er sich auf Grund seiner Parameter nur im Bereich zwischen Perihel und Aphel aufhalten kann. Trotzdem haben wir ja scheinbar den Schwarzschild-Radius als eine Lösung erhalten und tatsächlich haben wir ja auch mit drei Lösungen gerechnet. Liegt dieses eigenartige Ergebnis an unseren Näherungen? Schließlich haben wir ja klassische Werte benutzt, um mit diesen in die relativistische Gleichung einzugehen. Wir wollen daher einen Weg suchen, das Problem vollständig relativistisch zu rechnen, und dann unsere Näherung mit dem exakten Resultat vergleichen. Für die Bahndynamik sind die Parameter A^2 und B^2 von Bedeutung. Um diese für den Planeten Merkur zu bestimmen, müssen wir von den gemessenen Daten des Perihels und des Aphels ausgehen. Dazu formen wir zunächst die mittlere Gleichung von (199) noch etwas um:

$$A^2 - B^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{1}{r^2} = c^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \quad (200).$$

Setzen wir nun:

$$u(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{1}{r^2} \quad (201)$$

und

$$v(r) = c^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \quad (202),$$

bezeichnen wir weiter:



$$\begin{aligned}
 u_A &= u(r_{Aphel}) \\
 v_A &= v(r_{Aphel}) \\
 u_P &= u(r_{Perihel}) \\
 v_P &= v(r_{Perihel})
 \end{aligned}
 \tag{203},$$

dann können wir das folgende einfache lineare Gleichungssystem für A^2 und B^2 aufstellen:

$$\begin{aligned}
 A^2 - B^2 u_A &= v_A \\
 A^2 - B^2 u_P &= v_P
 \end{aligned}
 \tag{204}.$$

Die Lösungen dieses Gleichungssystems sind:

$$\begin{aligned}
 B^2 &= -\frac{v_A - v_P}{u_A - u_P} \\
 A^2 &= v_P - \frac{v_A - v_P}{u_A - u_P} u_P
 \end{aligned}
 \tag{205}.$$

Nach Rücksubstitution folgen:

$$B^2 = \frac{2Mc^2 \left(\frac{1}{r_{Perihel}} - \frac{1}{r_{Aphel}} \right)}{1 - \frac{2M}{\frac{r_{Perihel}}{r_{Perihel}^2}} - \frac{2M}{1 - \frac{r_{Aphel}}{r_{Aphel}^2}}}
 \tag{206},$$

sowie

$$A^2 = c^2 \left(1 - \frac{2M}{r_{Perihel}} \right) + \frac{2Mc^2 \left(\frac{1}{r_{Perihel}} - \frac{1}{r_{Aphel}} \right) \left(1 - \frac{2M}{r_{Perihel}^2} \right)}{1 - \frac{2M}{\frac{r_{Perihel}}{r_{Perihel}^2}} - \frac{2M}{1 - \frac{r_{Aphel}}{r_{Aphel}^2}}}
 \tag{207}.$$

Die konkrete Berechnung für den Planeten Merkur erfolgt in Anhang C unter Verwendung von (201) bis (205), es ergeben sich die folgenden Resultate:

$$A^2 - c^2 = -2.29261724422656E+0009 \frac{m^2}{s^2}
 \tag{208},$$

dem gegenüber fanden wir:

$$\frac{2E}{m_0} = -2.29268836490628E+0009 \frac{m^2}{s^2}
 \tag{209}.$$



Wir sehen also tatsächlich ein Abweichung, aber eine sehr geringe. Die Näherung (196) ist also gerechtfertigt, tatsächlich ist aber $A^2 > 0$, nämlich:

$$A^2 = 8.98755155810645E+0016 \frac{m^2}{s^2} \quad (210).$$

Aus diesem Grund kann die Lösung für r_{in} , gemäß (197), bzw. (C6), nur in Nähe des Schwarzschild-Radius sein. Der Abstand vom Schwarzschild-Radius beträgt:

$$r_{in} - r_S = 3.14777618843687E-0004 \text{ m} \quad (211).$$

Hätte das Perihel des Planeten Merkur nur $\frac{1}{100}$ seines tatsächlichen Wertes, unter sonst gleichen Bedingungen, so wäre der Abstand zwischen r_{in} und r_S immerhin:

$$r_{in} - r_S = 3.14782326641601E-0002 \text{ m} \quad (212).$$

Last but not least, exakt ergibt die Lösung der kubischen Gleichung (192):

$$\begin{aligned} r_{Aphel} &= 6.98199999998909 \text{ E}+0010 \text{ m} \\ r_{in} &= 2.95443042301759E+0003 \text{ m} \\ r_{Perihel} &= 4.60000000002406E+0010 \text{ m} \\ r_{in} - r_S &= 3.14777618843687E-0004 \text{ m} \end{aligned} \quad (213).$$

Der numerische Fehler kann mittels (213) abgeschätzt werden, in Meter angegeben beträgt er rund 1 dm . Damit ist die Differenz (212) zwischen r_{in} und r_S numerisch nicht messbar, die Differenzdaten sind daher ohne Aussage. Allein auf Grund von (199) können wir feststellen, dass es eine Differenz zwischen Schwarzschild-Radius und der innersten Lösung der kubischen Gleichung geben muss. Praktisch ist damit aber auch die Näherung (196) als quasi-exakt anzusehen. Es lohnt sich, noch einen Moment über die Gleichung (192) in ihrer umgestellten Form (200) nachzudenken, indem (200) direkt nach A^2 umgestellt wird:

$$A^2 = \left(c^2 + \frac{B^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \quad (214).$$

In der Beziehung (214) sei jetzt jeder Abstand r als Lösung der kubischen Gleichung (192) betrachtet, dann ist jedem Abstand $r > 0$ ein Wert A^2 zugeordnet. Wie bereits gezeigt, wird für $r = 2M$ die Größe A^2 Null, aber für $r < 2M$ folgt $A^2 < 0$ und das bedeutet: $A = j|A|$ mit $j^2 = -1$. Da unterhalb des Schwarzschild-Radius die Zeit raumartig und der Raum zeitartig wird, weil die entsprechenden räumlichen und die zeitlichen Komponenten des metrischen Tensors ihr Vorzeichen vertauschen, wie aus der Metrik direkt abgelesen werden kann, so bedeutet das, dass unterhalb des Schwarzschild-Radius die von



Feinberg hypothetisch angenommenen Tachyonen¹⁸ existieren können, die sich in dieser Metrik im Bereich $r < 2M$ wie normale Teilchen verhalten. Tachyonen wären Teilchen mit einer imaginären Ruhemasse, die sich stets mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen müssen. Obwohl grundsätzlich solche Teilchen mit der Speziellen Relativitätstheorie vereinbar sein könnten, steht ihre Existenz im Widerspruch zum Kausalitätsprinzip, wonach unabhängig vom Bezugssystem ein Ereignis 1 welches in einem System als Ursache eines Ereignisses 2 anzusehen ist, stets in allen Bezugssystemen als Ursache anzusehen sein muss. Kann die Verbindung zwischen zwei Ereignissen 1 und 2 durch Teilchen vermittelt werden, die sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen, so bezeichnet man dies mit Einstein so, dass diese Ereignisse „raumartig“ zueinander liegen. Das Kausalitätsprinzip ist aber nur gewahrt, wenn Ereignisse lichtartig oder zeitartig zueinander liegen. Doch die Veränderung der metrischen Verhältnisse innerhalb des Schwarzschild-Radius fordert in Übereinstimmung mit dem Kausalitätsprinzip die Existenz von Tachyonen in diesem seltsamen Gebiet geradezu heraus – ein Gedanke, den ich noch nirgendwo gelesen habe. Wir schauen uns nun den qualitativen Verlauf von (214) in einem Diagramm (Abbildung 3) an. In der Allgemeinen Relativitätstheorie ist die kraftfreie Bewegung eine geodätische Bewegung, sie ist das Analogon zur inertialen Bewegung in der Newtonschen, bzw. speziell relativistischen Raum-Zeit, und in dem exakten Sinne vollzieht das Teilchen im Gravitationsfeld eine freie Bewegung, es folgt dem Führungsfeld, welches durch die Metrik, d.h. durch die Raum-Zeit allein gegeben ist, während in der klassischen Newtonschen Gravitationstheorie die Bewegung zwischen Perihel und Aphel eines Planeten auf einem Prozess der periodischen Umwandlung von kinetischer Energie in potentielle Energie und wieder zurück beruht. Die Sprechweise aus der klassischen Physik möchte ich hier nur aus

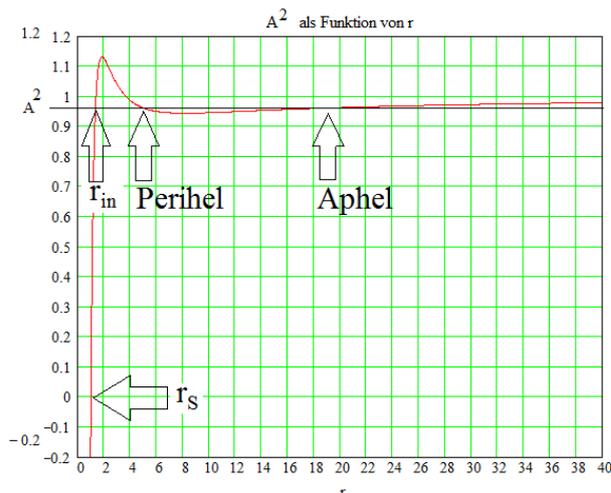


Abbildung 3: Die qualitative Darstellung nach Formel (212) zeigt, wie zu einem gegebenen Wert von A^2 drei verschiedenen Radien zugeordnet werden und welche Bedeutung sie haben. Der Abstand r ist in Einheiten des Schwarzschild-Radius dargestellt.

Anschaulichkeitsgründen übernehmen und weise eben deshalb darauf hin, dass diese der ART nicht angemessen ist. In dieser klassischen Sprechweise ausgedrückt stellt sich die Bewegung, z.B. des Planeten Merkur, eben als dieses Pendeln zwischen Perihel und Aphel dar. Das Neue ist offenbar eine dritte Grenze für die Bewegung, der Radius r_{in} . Dieser Radius hat den Charakter eines inneren Aphels, es ist der maximale Abstand, den ein Testteilchen mit der Energie A und dem Bahndrehimpuls B erreichen kann, falls es sich in unmittelbarer Nähe des Schwarzschild-Radius befindet. Die Redeweise, dass ein Teilchen einem Schwarzen Loch nicht zu nahe kommen darf, weil es sonst unweigerlich hineingezogen wird, ist exakt dadurch begründet, während ein ausreichend weit entferntes Objekt, wie z.B. der Merkur, niemals in diesen Bereich eindringen kann. Man sieht der Grafik auch an, dass sogar ein Objekt hineingezogen würde, welches eine höhere Energie als der Merkur hätte, wenn es nur nahe genug am Schwarzschild-Radius angelangt wäre.

höhere Energie als der Merkur hätte, wenn es nur nahe genug am Schwarzschild-Radius angelangt wäre.

¹⁸ Für Tachyonen gilt: $mc^2 = \frac{j m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \in \mathfrak{R}$, für $v^2 > c^2$, denn in diesen Fall wird die Wurzel imaginär, und dieser

Tatbestand wird durch die imaginäre Ruhemasse kompensiert. Tachyonen müssen sich mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen. Dieser Fall korrespondiert mit dem imaginären $A = j|A|$, $A \in \mathfrak{I}$ korrespondiert mit einer tachyonischen Energie. Es wäre einmal interessant zu untersuchen, wie sich ein Schwarzes Loch aus der Perspektive eines Tachyons darstellt.



In Worten der ART ausgedrückt führen alle Geodäten zu bestimmten Werten $A^2 < A_{kritisch}^2$ und $B^2 < B_{kritisch}^2$ ins Schwarze Loch.

Auch für den Drehimpuls lässt sich eine analoge Darstellung aus (192) herleiten. Entsprechend umgeformt finden wir:

$$B^2 = \left(\frac{A^2}{1 - \frac{2M}{r}} - c^2 \right) \cdot r^2 \quad (215).$$

Für dieselben Werte, welche wir für die Abbildung 3 verwendet haben, ergibt sich die folgende grafische Darstellung. Die Änderung der metrischen Verhältnisse unterhalb des Schwarzschild-

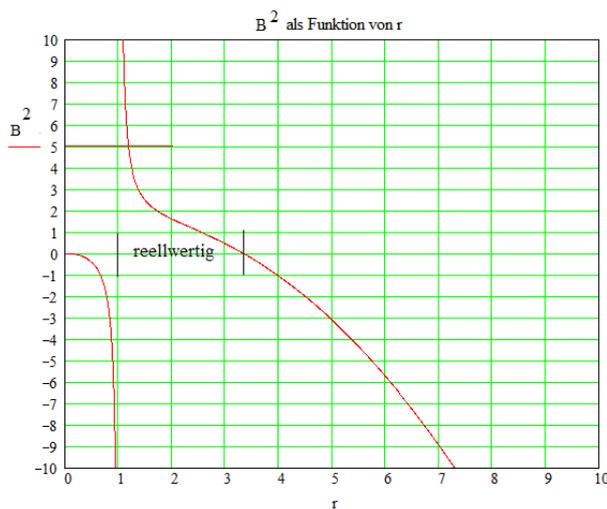


Abbildung 4: Wir sehen genau am Schwarzschild-Radius eine bemerkenswerte ungerade Polstelle für das Quadrat des Drehimpulsparameters. Unterhalb dieses Radius ist der Parameter komplexwertig, d.h. imaginär.

Radius findet ihren unmittelbaren Ausdruck in der in Abbildung 4 beobachtbaren ungeraden Polstelle des Drehimpulsparameters. Die in Abbildung 3 zu findenden Radien für Aphel und Perihel gehören zum in Abbildung 4 eingezeichneten Parameter $B^2 = 5$ und $A^2 = 0.7$. Diese Parameterwahl hat selbstverständlich gar nichts mit dem Planeten Merkur zu tun, außer dass man die 3 Lösungen der kubischen Gleichung veranschaulichen kann. Dass der Drehimpulsparameter auch für Radien imaginär wird, die weit vom Schwarzschild-Radius entfernt liegen, hängt einfach damit zusammen, dass solche Radien mit dem zugehörigen Energie-Parameter unverträglich sind, d.h. die Energie ist zu gering, um einen solchen Abstand einzunehmen. Wir müssen stets daran denken, dass nur für einen

eingeschränkten Satz von Parameterpaaren $\{A^2, B^2\}$ auch 3 reell-wertige Lösungen der kubischen Gleichung existieren.

Periheldrehung in der Schwarzschild-Metrik

Wir kommen nun zur Behandlung der Periheldrehung. Dazu erinnern wir uns zunächst an die Gleichung (158) für die Newtonsche Planetenbewegung:

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{Perihel}}^{r_{Aphel}} \frac{\frac{D}{m_0 r^2} dr}{\sqrt{\frac{2E}{m_0} - \frac{D^2}{m_0^2 r^2} + \frac{2\gamma M_0}{r}}} \quad (158).$$

Der Faktor 2 entstand auf Grund der Symmetrie des Problems, und es war daher auch ausreichend, das Integral vom Perihel bis zum Aphel auszuführen. Wie wir zeigen konnten, gibt es in der Newtonschen



Planetenbewegung keine Periheldrehung – im realen Planetensystem gibt es auch nach Newton eine Periheldrehung auf Grund von Bahnstörungen, aber hier wird ja ein idealisierter Fall behandelt, ohne andere störende Planeten. Da die Symmetrie des Problems auch in der ART erhalten bleibt, kann das bestimmte Integral genauso geführt werden, nur nutzen wir in diesem Fall die Beziehung (172) und schreiben sie in der entsprechenden Form auf:

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\text{Perihel}}}^{r_{\text{Aphel}}} \frac{\frac{B}{r^2} dr}{\sqrt{A^2 - c^2 + \frac{2Mc^2}{r} - \frac{B^2}{r^2} + \frac{2MB^2}{r^3}}} \quad (216).$$

Aufgrund des rechnerischen Umfangs verlegen wir die Integration in den Anhang D. Im Ergebnis der Integration ergeben sich Einsteins berühmte Formeln (D63)

$$\delta = \frac{6\pi M}{a(1-e^2)} \quad (217),$$

sowie die Berechnung in höherer Ordnung:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{2M}} \frac{4}{\sqrt{u_i - u_A}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{8} \pi \cdot k^2 + \frac{9}{128} \pi \cdot k^4 \right) \quad (218),$$

mit

$$k^2 = \frac{u_P - u_A}{u_i - u_A} \quad (219)$$

und

$$u_A = \frac{1}{r_{\text{Aphel}}}$$

$$u_P = \frac{1}{r_{\text{Perihel}}} \quad (220).$$

$$u_i = \frac{1}{r_{\text{in}}}$$

Die Periheldrehung δ ist durch die Beziehung:

$$\delta = \Delta\varphi - 2\pi \quad (221)$$

mit dem Integral (216) verknüpft. Nach Gleichung (218) ergibt sich für Einsteins relativistische Periheldrehung des Planeten Merkur der Wert¹⁹:

$$\delta = 42,998262(2)'' \pm 0.1375'' \quad (222).$$

¹⁹ Alle Angaben zur Periheldrehung beziehen sich auf ein irdisches Jahrhundert, d.h. 100 siderische Erdenjahre, siehe Anhang C.



Das ist der berechnete Wert. Der angegebene Fehlerbereich folgt aus der Ungenauigkeit der Kenntnis der Gravitationskonstante γ . Diesem Wert steht der mittige Wert zwischen dem jemals gemessenen maximalen und jemals gemessenen Minimalwert der Periheldrehung:

$$\delta_{\text{Messung-Mitte}} = 42,06'' \pm 1,21'' \quad (223)$$

gegenüber. Die Schwankungsbreite von $1,21''$ ist hier nicht die statistische Streuung, sondern dieser Wert kennzeichnet eben die Grenzen für eine gerade noch akzeptable Gravitationstheorie. Berechnet eine Theorie eine Periheldrehung, die außerhalb dieser Schranken liegt, ist sie als widerlegt anzusehen.

Planetenbewegung in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Wieder spezialisieren wir die Gleichung für die Metrik durch ein für die Anfangsbedingungen geeignet gewähltes Koordinatensystem, gemäß (100) und (101), d.h. wir wählen $\mathcal{G} = \frac{\pi}{2}$ und $\dot{\mathcal{G}} = 0$.

Die Lagrange-Funktion zur Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik (11) verkürzt sich damit auf:

$$L = \frac{m_0}{2} \left[e^{\frac{2M}{r}} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 - e^{-\frac{2M}{r}} (\dot{x}^4)^2 \right] \quad (224).$$

Genau wie im klassischen Fall und in der Schwarzschild-Metrik sind φ und x^4 zyklische Koordinaten und daraus ergeben sich die Erhaltungssätze des Drehimpulses und der Energie:

$$r^2 \dot{\varphi} = B \quad (225),$$

$$e^{-\frac{2M}{r}} \frac{dct}{d\tau} = A \quad (226).$$

Statt die Lagrange-Gleichungen zur Post-Schwarzschild-Metrik zu integrieren, verwenden wir wieder die Definitionsgleichung der Eigenzeit, die bereits ein Integral der Bewegung darstellt, und die aus der Lagrange-Funktion abgelesen werden kann:

$$e^{\frac{2M}{r}} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 - e^{-\frac{2M}{r}} (\dot{x}^4)^2 = -c^2 \quad (227).$$

Setzen wir die Erhaltungssätze (225) und (226) in (227) ein, dann finden wir:

$$e^{\frac{2M}{r}} \dot{r}^2 + \frac{B^2}{r^2} - e^{-\frac{2M}{r}} A^2 = -c^2 \quad (228).$$

Stellen wir diese Gleichung nach \dot{r} um, dann folgt:

$$\dot{r} = \sqrt{A^2 - \left(c^2 + \frac{B^2}{r^2} \right) e^{-\frac{2M}{r}}} \quad (229).$$



Durch Trennung der Variablen finden wir:

$$\tau - \tau_0 = \int \frac{dr}{\sqrt{A^2 - \left(c^2 + \frac{B^2}{r^2}\right) e^{-\frac{2M}{r}}}} \quad (230).$$

Aufgrund der Exponentialfunktion ist ein termweiser Vergleich mit dem klassischen und dem Einstein'schen Fall nur nach einer Reihenentwicklung der Exponentialfunktion möglich, das ergibt unter Nutzung von (4) den Ausdruck:

$$\tau - \tau_0 = \int \frac{dr}{\sqrt{A^2 - c^2 + 2Mc^2 \frac{1}{r} - (2M^2c^2 + B^2) \frac{1}{r^2} + \left(\frac{4}{3}M^3c^2 + 2MB^2\right) \frac{1}{r^3} - \left(\frac{2}{3}M^4c^2 + M^2B^2\right) \frac{1}{r^4} + \dots}} \quad (231).$$

Wir erkennen hier deutlich die Einstein-Schwarzschild-Terme:

$$\begin{aligned} &A^2 - c^2 \\ &- \frac{B^2}{r^2} \\ &+ \frac{2MB^2}{r^3} \end{aligned} \quad (232),$$

alle übrigen Terme stellen Korrekturen zur Einstein-Schwarzschild-Metrik dar. Bemerkenswert an dem Ausdruck (230) ist die Beobachtung, dass der gesamte Faktor:

$$\left(c^2 + \frac{B^2}{r^2}\right) \quad (233)$$

eine Suppression erfährt, immerhin wirkt er auch auf das Lichtgeschwindigkeitsquadrat. Doch vergleichen wir die Ausdrücke noch etwas genauer. Im Einstein-Schwarzschild-Fall ergibt sich:

$$A^2 - \left(c^2 + \frac{B^2}{r^2}\right) \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = A^2 - c^2 + \frac{2Mc^2}{r^2} - \frac{B^2}{r^2} + \frac{2MB^2}{r^3} \quad (234)$$

und im Post-Einstein-Schwarzschild-Fall erkennt man:

$$A^2 - \left(c^2 + \frac{B^2}{r^2}\right) e^{-\frac{2M}{r}} = A^2 - c^2 + \frac{2Mc^2}{r^2} - \frac{B^2}{r^2} + \frac{2MB^2}{r^3} + Q(r) \quad (235),$$

wobei $Q(r)$ die Post-Einstein-Schwarzschild-Korrekturterme zusammenfasst. Wir sehen, dass nicht nur die Exponentialfunktion auf den c^2 -Term im Post-Einstein-Schwarzschild-Fall wirkt, sondern bereits in der ART der Faktor $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$. Wir wissen auch, dass gerade dieser Faktor für das Singularitätsproblem der ART sorgt, denn genau am Schwarzschild-Radius wird dieser Faktor Null und dieses Verschwinden des



Terms wird gerade durch die Post-Einstein-Schwarzschild-Korrektur $Q(r)$ verhindert, was daran zu sehen ist, dass die Exponentialfunktion für $r > 0$ niemals Null werden kann. Diese Korrektur bewirkt daher eine Abmilderung der Einstein'schen Gravitation, so dass wir in Bezug auf die Periheldrehung erwarten, dass diese geringfügig kleiner als nach der Einstein'schen Theorie ausfallen wird. Der Korrekturterm ergibt sich per Definition als Differenz zwischen (235) und (234) zu:

$$Q(r) = -\left(c^2 - \frac{B^2}{r^2}\right) \left(e^{-\frac{2M}{r}} - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \right) = -\left(c^2 - \frac{B^2}{r^2}\right) \left(\frac{1}{2} \frac{(2M)^2}{r^2} - \frac{1}{6} \frac{(2M)^3}{r^3} + \frac{1}{24} \frac{(2M)^4}{r^4} - \dots \right) \quad (236)$$

und mit der Substitution:

$$u(r) = \frac{1}{r} \quad (237)$$

folgt:

$$Q(u) = -\left(c^2 - B^2 u^2\right) \left(\frac{1}{2} (2M)^2 u^2 - \frac{1}{6} (2M)^3 u^3 + \frac{1}{24} (2M)^4 u^4 - \dots \right) \quad (238).$$

Wir schreiben diese Formel erst einmal hin, um später darauf zurückzukommen. Wir wollen nun ein effektives Potential zur Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik diskutieren. Im Unterschied zur Schwarzschild-Metrik, in der wir die Identifikation (175) vornehmen konnten, und daher die Analogie zum klassischen effektiven Potential (118) herstellbar war, ist das im Fall der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik scheinbar nur auf Basis der Reihenentwicklung möglich, weil die Exponentialfunktion auch auf den Faktor c^2 wirkt, siehe die Anmerkung zu (233). Doch wir können ja einen Trick anwenden, indem wir einen Schummelterm $-c^2 + c^2$, also eine Null hinzufügen, und alles so aufschreiben, dass wir die alte und für den Vergleich brauchbare Form wahren. Auf diese Weise müssen wir uns nicht mit einer Reihenentwicklung begnügen, um ein effektives Potential aufzuschreiben. Mit diesem Trick wird aus (230) der Ausdruck:

$$\tau - \tau_0 = \int \frac{dr}{\sqrt{A^2 - c^2 - \left(c^2 + \frac{B^2}{r^2}\right) e^{-\frac{2M}{r}} + c^2}} \quad (239).$$

Das effektive Potential zur Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Das effektive Potential zur Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik ist dann durch:

$$\tilde{U}_{\text{eff}} = -\alpha \cdot c^2 + \alpha \cdot \left(c^2 + \frac{B^2}{r^2} \right) e^{-\frac{2M}{r}} \quad (240)$$

gegeben. Der Faktor α sichert wieder die Vergleichbarkeit mit dem Newtonschen Fall, vergleiche hierzu (173) bis (176). Dieses Potential hat die Eigenschaft für $r = 0$ gegen $-\alpha \cdot c^2$ zu konvergieren:



$$\lim_{r \rightarrow 0} \left(-\alpha \cdot c^2 + \alpha \cdot \left(c^2 + \frac{B^2}{r^2} \right) e^{-\frac{2M}{r}} \right) = -\alpha \cdot c^2 \quad (241).$$

Es nimmt also einen endlichen Wert an, während das effektive Potential zur Schwarzschild-Metrik ins Negative divergiert. Für große Abstände, d.h. für $r \rightarrow \infty$ sehen wir ein Verhalten, wie im klassischen und im Einstein-Schwarzschild-Fall:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(-\alpha \cdot c^2 + \alpha \cdot \left(c^2 + \frac{B^2}{r^2} \right) e^{-\frac{2M}{r}} \right) = 0 \quad (242),$$

wobei es sich dem klassischen Verhalten asymptotisch annähert. Bilden wir die erste Ableitung und setzen diese Null, erhalten wir die Gleichung für die Extremstellen:

$$\frac{d\tilde{U}_{\text{eff}}}{dr} = -2\alpha \frac{B^2}{r^3} e^{-\frac{2M}{r}} + \alpha \frac{2M}{r^2} \left(c^2 + \frac{B^2}{r^2} \right) e^{-\frac{2M}{r}} = 0 \quad (243),$$

und es folgt daraus:

$$-B^2 r + Mc^2 r^2 + MB^2 = 0 \quad (244).$$

Wir finden die Lösung:

$$r_{1,2,\text{extr.}} = \frac{B^2}{2Mc^2} \pm \sqrt{\left(\frac{B^2}{2Mc^2} \right)^2 - \frac{B^2}{c^2}} \quad (245).$$

Aufgrund der Ergebnisse (241) und (242) kann der qualitative Verlauf des effektiven Potentials zur Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik offensichtlich wie folgt beschrieben werden:

- Bei $r = 0$ nimmt das effektive Potential den endlichen negativen Wert $-\alpha \cdot c^2$ an. Zugleich hat die erste Ableitung des effektiven Potentials den Wert Null, weil die e-Funktion jede Singularität unterdrückt. Wir haben also eine vollständige Singularitätsfreiheit der Gravitation erreicht.
- Von dem Wert $r = 0$ an beginnt mit wachsendem r das effektive Potential bis zu seinem

Maximum bei $r_{\text{Max}} = \frac{B^2}{2Mc^2} - \sqrt{\left(\frac{B^2}{2Mc^2} \right)^2 - \frac{B^2}{c^2}}$ anzusteigen.

- Für Abstände $r_{\text{Max}} < r < r_{\text{Min}} = \frac{B^2}{2Mc^2} + \sqrt{\left(\frac{B^2}{2Mc^2} \right)^2 - \frac{B^2}{c^2}}$ fällt es auf ein Minimum ab.
- Ab dem Minimum bewegt es sich wieder aufwärts, bis es schließlich für $r \rightarrow \infty$ gegen den Grenzwert Null strebt.
- Die stabilen finiten Bewegungen, welche zwischen Perihel und Aphel pendeln, d.h. die Planetenbahnen, befinden sich dann in der Umgebung des Minimums.



- Für Objekte, die sich im Abstand $r < r_{Max}$ befinden und deren Energien nicht ausreichen, um das Maximum des effektiven Potentials zu überwinden, gibt es keine stabilen Bahnen, sie müssen unvermeidlich ins Zentrum stürzen: *Staubsauger-Effekt*. Doch die Selbstabsorption der Schwerkraft führt dazu, dass ein Gravitationskollaps niemals einsetzen kann, gleichgültig, wie viel Materie ins Zentrum stürzt. Nur nach Außen, in großen Abständen, wird ein Anwachsen der Zentralmasse durch das Hineinstürzen von Objekten bemerkt. Und diese Eigenschaft steht in engstem Zusammenhang mit einem Dunkle-Materie-Effekt, der aus der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik resultiert.
- *Dunkle-Materie-Effekt*: Ein superdichtes Objekt kann beliebig viel normale Materie in sich aufnehmen, ohne dass sich die Gravitation in seiner Umgebung merklich steigert. Der Anstieg ist nur in größerer Entfernung spürbar, wo die Schwereabsorption sich reduziert. Beurteilt also ein Beobachter die Bewegung von Planeten um ein superdichtes Objekt, oder von Sternen um das Zentrum einer Galaxie auf Basis der Newtonschen Gravitationstheorie, so kommt er zu einer falschen Massenbeurteilung für das Objekt, er schätzt diese Masse als zu klein ein. Dafür scheinen ihm weit entfernte Objekte, z.B. Sterne weit außerhalb der Galaxie, sich viel zu schnell zu bewegen. Der Beobachter zieht daraus den falschen Schluss, dass es eine neue Art von nicht beobachtbarer Materie geben müsste, welche die höhere Rotation erklärt, tatsächlich handelt es sich nicht um eine neue Art von Materie, sondern um die Folge der Selbstabschirmung der Schwerkraft, die in großer Distanz schwächer ausfällt und daher ein vergleichsweise stärkeres Gravitationsfeld bewirkt.

Aus der Gleichung (245) können wir der Wurzel entnehmen, dass nur unter der Voraussetzung:

$$B^2 > 4M^2c^2 \quad (246)$$

zwei Extremwerte des effektiven Potentials existieren. Ist der Betrag des Drehimpulses zu klein, existiert kein Bereich in dem ein Pendeln des Planeten zwischen Perihel und Aphel sich ausbilden kann. Für

$B^2 = 4M^2c^2$ verschmelzen die Extremwerte zu einem Sattelpunkt bei:

$$r_{Sattel} = \frac{B^2}{2Mc^2} \quad (247).$$

Das effektive Potential hat dann am Sattelpunkt den Wert:

$$\tilde{U}_{eff} = -\alpha c^2 \left(1 - \frac{2}{e} \right) \quad (248).$$

Derartige Verhältnisse könnten in den Zentren von Galaxien nachgewiesen werden, wenn Sterne in diesen Bereich geraten, deren Drehimpuls die entsprechenden Bedingungen erfüllt.

Wir untersuchen nun die finite Planetenbewegung im Zentralfeld der Post-Einstein-Metrik. Aphel und Perihel ergeben sich aus der Gleichung (229), wenn wir diese nullsetzen:



$$0 = A^2 - \left(c^2 + \frac{B^2}{r^2} \right) e^{-\frac{2M}{r}} \quad (249).$$

Wir erkennen hier sofort das Aufeinandertreffen zweier unterschiedlicher algebraischer Strukturen und wissen daher, dass ein Auflösen der Gleichung nach r im Allgemeinen nicht möglich ist. Nur im Falle $A^2 = 0$ finden wir einen expliziten Ausdruck:

$$0 = - \left(c^2 + \frac{B^2}{r^2} \right) e^{-\frac{2M}{r}} \quad (250),$$

aus dem:

$$c^2 r^2 = -B^2 e^{-\frac{2M}{r}} \quad (251)$$

abgeleitet werden kann. Wegen des negativen Vorzeichens kann diese Gleichung physikalisch sinnvoll nur für $r = 0$ erfüllt sein. Aus diesem Grunde besteht bestenfalls nur die Möglichkeit, eine Näherungsformel auf Basis einer Reihenentwicklung herzuleiten und zweitens eine numerische Lösung zu suchen. Legt man die für den Einstein-Fall ermittelten Größen $A^2 - c^2$ sowie B^2 gemäß (C7) aus dem Anhang zu Grunde, dann findet man näherungsweise durch numerische Rechnung:

$$r_{\text{Perihel}} = 4.60000079600000E+0010 \text{ m}, \quad r_{\text{Aphel}} = 6.98199910800000E+0010 \text{ m} \quad (252).$$

Das sind praktisch die empirischen Ausgangsdaten und die Abweichungen sind computer-numerischer Natur. Wir sehen hier augenscheinlich, dass die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik eine echte Alternative zur Beschreibung der Bewegung der Himmelskörper im Planetensystem zu den Newton-Einstein'schen Gravitationstheorien darstellt. Wir haben die Genauigkeit der Berechnung nicht höher getrieben, weil überhaupt nicht mehr erkennbar war, welchen Sinn das haben sollte.

Kommen wir nun zur genannten Möglichkeit, durch Reihenentwicklung eine Näherungslösung zu finden, wobei schon jetzt klar ist, dass die Abweichung nur marginaler Natur ist, und daher hat die Reihenentwicklung mehr den Sinn, das auch analytisch deutlich zu machen. Erinnern wir uns also an (4), an Stelle von (6) setzen wir $x = \frac{2M}{r}$, dann folgt unter Berücksichtigung des ersten Post-Einstein-Schwarzschild-Terms für (249):

$$0 = A^2 - \left(c^2 + \frac{B^2}{r^2} \right) \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{2M}{r} \right)^2 \right) \quad (253).$$

Allein dieser Ausdruck ist schon von der Interpretationsmöglichkeit sehr instruktiv, denn weil der Gravitationsradius der Sonne so klein im Verhältnis zum Abstand des Merkurs vom Sonnenzentrum ist und weil dieses kleine Verhältnis auch noch als Hälfte seines Quadrats in (249) eingeht, ist es praktisch zu klein, um eine merkliche Änderung der Aphel, bzw. Perihel Daten gegenüber der Einstein'schen Theorie zu bewirken. Lösen wir die Klammer auf, dann folgt:



$$\dot{r}^2 = A^2 - c^2 + \frac{2Mc^2}{r} - \frac{B^2}{r^2} + \frac{2MB^2}{r^3} - \frac{2Mc^2}{r^2} - \frac{2B^2M^2}{r^4} \quad (254).$$

Und wir erkennen in welcher theoretischen Bedeutung die Termen zu den Gravitationstheorien stehen:

- Term 1 und 2 liefern gemeinsam den quasiklassischen Energieparameter,
- Term 3 ist die Newtonsche Gravitation,
- Term 4 ist der Drehimpuls,
- Term 5 ist die Ursache der Einstein'schen Periheldrehung,
- Term 6 ist eine Post-Einstein-Korrektur zum Drehimpuls, er bewirkt eine Verkleinerung von r_{in} ,
- Term 7 ist ebenfalls eine Post-Einstein'sche Korrektur, sie beeinflusst die Periheldrehung auf Grund der 4. Potenz des Kehrwertes des Radius nur schwach und bewirkt eine leichte Verkleinerung und damit eine Verbesserung der theoretischen Vorhersage.

Unter Vernachlässigung des Terms $\propto \frac{1}{r^4}$ ist die Anwendung des analytischen Apparates aus Anhang B zur Bestimmung einer Näherungsformel für die Abstände, und das Formelwerk zur Bestimmung einer Näherungsformel für die Periheldrehung gemäß Anhang D möglich. Wir schreiben für diese Aufgabe (250) etwas um:

$$\dot{r}^2 = A^2 - c^2 + \frac{2Mc^2}{r} - \frac{B^2 + 2Mc^2}{r^2} + \frac{2MB^2}{r^3} \quad (255).$$

Mit (D2) erhalten wir:

$$\dot{r}^2 = A^2 - c^2 + 2Mc^2u - (B^2 + 2Mc^2)u^2 + 2MB^2u^3 \quad (256),$$

und nach Division durch $2MB^2$, sowie dem Nullsetzen $\dot{r}^2 = 0$ (um die Umkehrpunkte der Bewegung zu erhalten) haben wir schließlich:

$$0 = X_0 + X_1u + X_2u^2 + u^3 \quad (257),$$

aber an die Stelle von B2, bzw. D8 tritt hier:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{A^2 - c^2}{2MB^2} \\ X_1 &= \frac{c^2}{B^2} \\ X_2 &= -\frac{B^2 + 2Mc^2}{2MB^2} \end{aligned} \quad (258).$$

Der Unterschied besteht nur in X_2 . Dieser Unterschied ist aber bedeutsam, weil er die Beziehungen zwischen den Abständen u_{in} (zum innersten Radius), u_A (zum Aphel) und $u_{Perihel}$ (zum Perihel) regelt:



$$\frac{B^2 + 2Mc^2}{2MB^2} = u_{in} + u_P + u_A \quad (259).$$

Wegen (252) wissen wir, dass für den Planeten Merkur praktisch keine relevanten Unterschiede zur Einstein'schen Theorie bezüglich u_A und u_P bestehen. Deswegen bewirkt (256) eine Modifikation von u_{in} :

$$u_{in} = \frac{1}{2M} + \frac{c^2}{B^2} - u_P - u_A \quad (260).$$

Diese Veränderung bedeutet, dass sich u_{in} um $\frac{c^2}{B^2}$ gegenüber der Einstein'schen Theorie vergrößert. Da u_{in} aber der Kehrwert von r_{in} ist, rückt r_{in} weiter ins Zentrum, d.h. die physikalischen Verhältnisse die denen von Schwarzen Löchern leicht oberhalb des Schwarzschild-Radius entsprechen, diese Verhältnisse befinden sich nun in der Nähe von $r = 0$.

Periheldrehung in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

In derselben Näherung des Weglassens des Terms $\propto \frac{1}{r^4}$ modifizieren sich einige Ausdrücke, welche die Periheldrehung beschreiben. Das betrifft die Größe k^2 in (D27), da in diese Größe u_{in} eingeht. Entsprechend verändern sich auch gewisse Terme und Faktoren in (D29), D(30), usw., doch zum Glück ändert das überhaupt nichts an den für die Integration relevanten Formen, so dass wir das Resultat mit der besten Näherung, die Beziehung (D34) automatisch verwenden können, wenn statt mit dem Einstein'schen u_i jetzt mit dem durch (260) bestimmten u_{in} gerechnet wird. Dann erhalten wir für die Periheldrehung:

$$\delta_{PESM} = \frac{1}{\sqrt{2M}} \frac{4}{\sqrt{u_i - u_A}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{8} \pi \cdot k^2 + \frac{9}{128} \pi \cdot k^4 \right) - 2\pi \quad (261),$$

mit

$$k^2 = \frac{u_P - u_A}{u_{in} - u_A} \quad (262).$$

Die auf diese Weise bestimmte Periheldrehung zur Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik des Planeten Merkur beträgt:

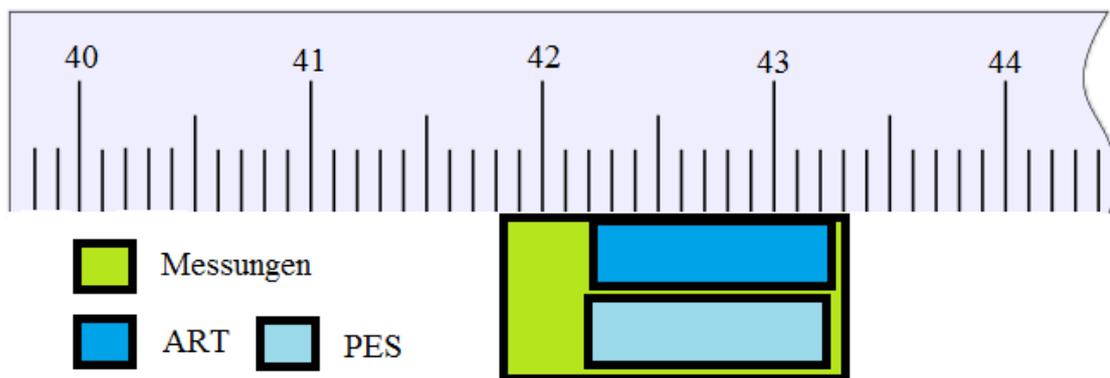
$$\delta_{PESM} = 42,98887(2)'' \pm 0,1378(1)'' \quad (263).$$



Tabelle 18: Die Tabelle zeigt die Periheldrehung des Planeten Merkur für verschiedene Gravitationskonstanten [in $\frac{m^3}{kg \cdot s^2}$] die im Vergleich:

Gravitationstheorie / Gravitationskonstante	6.67265E-11 Luther & Towler	6.677E-11 AGM	6.7154056E-11 PTB
Schwarzschild-Metrik	42,970411''	42,998926''	43,246437''
Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik	42,960858''	42,988872''	43,236196''

Der Fehlerbalken folgt aus der ungenauen Kenntnis der Newtonschen Gravitationskonstante. Der Bereich der Messungen der Periheldrehung ist aus den Arbeiten von Morrison und Ward (1975), Shapiro (1956), Anderson (1987, 1991 und 1992) entnommen:



Die praktische Gleichheit der Periheldrehungen liegt an der von uns vorgenommenen Näherung, denn der Übergang von der Schwarzschild-Lösung der Einstein'schen ART zur Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik bewirkte keine Änderung im $\frac{1}{r^3}$ -Term und die anderen Terme bewirken keine Periheldrehung, höhere Terme, welche eine Periheldrehung verursachen, wurden aber wegen ihrer Kleinheit weggelassen, und insofern handelt es sich bei den Unterschieden um numerische Artefakte. Allerdings ist dadurch die Näherung nicht Unsinn, denn es ist eben eine Eigenschaft der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik, den entsprechenden $\frac{1}{r^3}$ -Term gerade nicht zu verändern. Deswegen sind die realen Unterschiede physikalisch tatsächlich marginal.

Wir wollen nun eine genauere Berechnung der Periheldrehung des Planeten Merkur auf Basis der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik durchführen. Um das zu erreichen, reicht es nicht aus, mit den Einsteineschen Werten für A^2 und B^2 als Näherungen zu starten, sondern wir müssen diese Werte zuerst aus den gemessenen Daten für Perihel und Aphel berechnen. Wir gehen dazu von Gleichung (245) aus, wobei wir für die zwei Unbekannten dadurch zwei unabhängige Gleichungen erhalten, indem wir einmal das Aphel und einmal das Perihel in (245) einsetzen:

$$0 = A^2 - \left(c^2 + \frac{B^2}{r_A^2} \right) \cdot e^{-\frac{2M}{r_A}} \quad (264),$$



$$0 = A^2 - \left(c^2 + \frac{B^2}{r_P^2} \right) \cdot e^{-\frac{2M}{r_P}} \quad (265).$$

Das Gleichungssystem ist leicht nach der gesuchten Größe B^2 auflösbar, wir finden:

$$B^2 = \frac{c^2(1 - \chi)}{\frac{1}{r_P^2} - \frac{1}{r_A^2}} \quad (266),$$

mit

$$\chi = e^{-2M \left(\frac{1}{r_P} - \frac{1}{r_A} \right)} \quad (267).$$

Aus dem mittels (266) berechneten Wert kann nun A^2 ausgerechnet werden:

$$A^2 = \left(c^2 + \frac{B^2}{r_P^2} \right) \cdot e^{-\frac{2M}{r_P}} \quad (268),$$

wir verzichten auf das Einsetzen und ersparen uns dadurch Monsterausdrücke. Für den Merkur ergeben sich damit die folgenden Daten:

$$\begin{aligned} A^2 &= 8,98755155810645E + 16 \frac{m^2}{s^2} \\ B^2 &= 7,36324492412315E + 30 \frac{m^4}{s^2} \end{aligned} \quad (269).$$

Lichtablenkung im Newtonschen Gravitationsfeld

Wir kommen nun zur Berechnung der Ablenkung von Licht am Sonnenrand, bzw. in Sonnennähe auf Grund der Wirkung des Newtonschen Gravitationsfeldes. Als bekannt setzen wir voraus, dass die Bewegungen im kugelsymmetrischen Zentralfeld nach der Newtonschen Gravitationstheorie perfekte Kegelschnitte sind, wenn man die Störungen durch die planetaren Himmelskörper vernachlässigt. Weil die Lichtgeschwindigkeit deutlich höher als die 2. kosmische Geschwindigkeit ist, bewegt sich das Licht auf einer Hyperbel-Bahn. Die Lichtgeschwindigkeit ist in der Newtonschen Physik nicht als konstant anzusehen. Wir setzen die Lichtgeschwindigkeit am sonnennächsten Punkt, d.h. für uns am Sonnenrand, gleich der bekannten Vakuumlichtgeschwindigkeit. Der Fehler ist klein, da das Gravitationspotential der Sonne klein gegenüber dem Lichtgeschwindigkeitsquadrat ist. Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass die Bewegung des Lichtes in der x-y-Ebene erfolgt. Das Koordinatensystem wird dabei so im Raum positioniert, dass sich die beiden Asymptoten der Hyperbel im Ursprung schneiden. Auf Grund dieser Koordinatenwahl gilt die Mittelpunktdarstellung (Mittelpunktgleichung) für die Hyperbel:



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (270).$$

Die folgenden geometrischen Beziehungen können jeder guten mathematischen Formelsammlung entnommen werden. In (270) sind die Größen a und b die Halbachsen, wobei a eine reelle und b eine imaginäre Halbachse ist, da es sich um eine Hyperbel und nicht um eine Ellipse handelt - daher auch das negative Vorzeichen. Auf Grund der von uns gewählten Koordinatenwahl ist die Darstellung der Asymptoten, die ja die Lichtbahn in unendlich großer Entfernung von der Sonne beschreiben, besonders einfach. Die Asymptotengleichungen lauten:

$$\begin{aligned} y_1 &= +\frac{b}{a}x \\ y_2 &= -\frac{b}{a}x \end{aligned} \quad (271).$$

Wir definieren, dass es sich bei y_1 um die vom Stern zur Sonne laufende Asymptote und bei y_2 um die von der Sonne weg gerichtete und zum unendlich entfernten Beobachter verlaufende Asymptote handelt. Wir definieren weiter, dass α der Winkel zwischen diesen beiden Asymptoten sei. Mit dieser Definition folgt für den Winkel der Lichtablenkung, den wir mit β bezeichnen, die Beziehung:

$$\beta = \pi - \alpha \quad (272),$$

wie man sich geometrisch leicht klarmachen kann, denn der Beobachter erkennt den Stern in der Gegenrichtung der auslaufenden Asymptote. Um zunächst den Winkel zwischen den beiden Asymptoten zu bestimmen, legen wir zwei Ortsvektoren \vec{A}_1 und \vec{A}_2 in die Asymptoten, d.h. \vec{A}_1 zeigt in die tatsächliche Richtung des unendlich weit entfernten Sterns und \vec{A}_2 zeigt in die tatsächliche Richtung des unendlich weit von der Sonne entfernten Beobachters. Mit Hilfe der Asymptotengleichungen können wir die Vektoren konstruieren, indem wir z.B. $x = 1$ setzen, dann sind die Vektoren durch

$$\begin{aligned} \vec{A}_1 &= \begin{pmatrix} +1 \\ +\frac{b}{a} \end{pmatrix} \\ \vec{A}_2 &= \begin{pmatrix} +1 \\ -\frac{b}{a} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (273)$$

gegeben. Mittels des Skalarproduktes können wir den Cosinus des Winkels α zwischen diesen beiden Vektoren bestimmen:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2}{|\vec{A}_1| \cdot |\vec{A}_2|} = \frac{1 - \frac{b^2}{a^2}}{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{1 - \eta}{1 + \eta} \quad (274),$$



wobei wir zur Abkürzung:

$$\eta = \frac{b^2}{a^2} \quad (275)$$

verwendet haben. Tatsächlich interessiert uns ja nicht der Winkel α , sondern die Lichtablenkung β . Aus diesem Grunde stellen wir die Beziehung (272) nach α um:

$$\alpha = \pi - \beta \quad (276)$$

und setzen (276) in die Gleichung (274) ein:

$$\cos(\pi - \beta) = \frac{1 - \eta}{1 + \eta} \quad (277).$$

Mit Hilfe des Additionstheorems:

$$\cos(\pi - \beta) = \cos(\pi) \cos(\beta) + \sin(\pi) \sin(\beta) \quad (278)$$

folgte wegen $\cos(\pi) = -1$ und $\sin(\pi) = 0$:

$$\cos(\pi - \beta) = -\cos(\beta) = \frac{1 - \eta}{1 + \eta} \quad (279),$$

bzw.

$$\cos(\beta) = -\frac{1 - \eta}{1 + \eta} \quad (280).$$

Nun ist im Falle des Sonnensystems die Lichtablenkung extrem klein. Darum rechnen wir selbst dann praktisch exakt, wenn wir die Cosinus-Funktion durch eine Reihenentwicklung annähern und lediglich die beiden ersten Terme der Entwicklung verwenden, d.h. mit $\cos(\beta) \cong 1 - \frac{\beta^2}{2}$ rechnen, dann folgt für (280) die Gleichung:

$$1 - \frac{\beta^2}{2} = -\frac{1 - \eta}{1 + \eta} \quad (281).$$

Stellen wir diese Gleichung nach dem Winkel für die Lichtablenkung um, dann finden wir:

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{1 + \eta}} \quad (282).$$

Wir haben nun erst einmal einen formalen Ausdruck für die Lichtablenkung gefunden. Was wir aber noch nicht haben, ist die Beziehung dieses Ausdrucks zur Newtonschen Gravitationstheorie. Da in die



Hilfsgröße η die Halbachsen a und b eingehen, müssen wir die Beziehungen dieser Größen zu den physikalischen Größen suchen. Für die Größe a können wir die Beziehung (150) verwenden. Wir müssen dabei aber nicht mehr auf das Betragszeichen für die Energie achten, weil für die Hyperbel die Energie positive Werte annimmt, es gilt folglich:

$$a = \frac{\gamma m M_0}{2E} \quad (283).$$

Weiter gilt der geometrische Zusammenhang:

$$b^2 = p \cdot a \quad (284).$$

Der minimale Abstand zum Sonnenzentrum hängt mit anderen Parametern der Hyperbel über die Beziehung:

$$R = \frac{p}{1+e} = a(e-1) \quad (285)$$

zusammen, mit (283) folgt:

$$R = \frac{\gamma m M_0}{2E} (e-1) \quad (286),$$

nach der Exzentrizität umgestellt erhalten wir:

$$e = 1 + \frac{2ER}{\gamma m M_0} \quad (287).$$

Dabei steht p orthogonal auf der x-Achse und bezeichnet die Länge zwischen Sonnenmittelpunkt und Parabel, $e = \sqrt{a^2 + b^2}$ ist die lineare Exzentrizität. Aus der Beziehung (285) folgen:

$$a = \frac{R}{e-1} \quad (288)$$

und

$$p = R(1+e) \quad (289).$$

Wie wir bereits wissen, gilt für die Bewegung im Zentralfeld der Drehimpulssatz (104), den wir hier zur Erinnerung leicht vereinfacht in der Betragsform aufschreiben:

$$D = m \cdot r^2 \cdot \dot{\phi} = \text{const.} \quad (290),$$

und es gilt der Energieerhaltungssatz (107), auch hier zur Erinnerung:



$$E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{D^2}{2mr^2} - f \frac{mM_0}{r} = \text{const.} \quad (291).$$

Da das Lichtteilchen genau am Sonnenrand bei $r = R$ seine geringste Distanz zur Sonnenmitte haben soll, gilt an diesem Punkt:

$$\dot{r} = 0 \quad (292)$$

und der Ausdruck (291) für die Energie erhält an diesem Punkt die Form:

$$E = \frac{D^2}{2mR^2} - f \frac{mM_0}{R} \quad (293).$$

An der gleichen Stelle sei die Geschwindigkeit des Lichtteilchens gleich der Vakuumlichtgeschwindigkeit:

$$v = c \quad (294).$$

Formen wir mittels $v = r\dot{\varphi}$ den Ausdruck (290) etwas um:

$$D = m \cdot r \cdot v \quad (295),$$

und setzen (294) sowie den Sonnenradius R in (295) ein, dann ergibt sich:

$$D = m \cdot R \cdot c \quad (296).$$

Auf diese Weise haben wir erst einmal die Beziehung zwischen dem Licht, den Erhaltungsgrößen und dem Sonnenradius hergestellt. Setzen wir nun noch den Ausdruck (296) in die Beziehung (293) ein, dann erhalten wir schließlich:

$$E = \frac{mc^2}{2} - f \frac{mM_0}{R} \quad (297).$$

Nun können wir mit diesen Resultaten die Exzentrizität (289) bestimmen:

$$e = \frac{Rc^2}{\gamma M_0} - 1 \quad (298).$$

Weil wegen (284) zugleich:

$$p = \frac{b^2}{a} \quad (299)$$

gilt, folgt für b^2 :

$$b^2 = p \cdot a = R^2 \frac{1+e}{e-1} \quad (300),$$



und endlich sind wir in der Lage, unsere Hilfsgröße auszurechnen:

$$\eta = \frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1 \quad (301).$$

Setzen wir hier (298) ein, finden wir:

$$\eta = \left(\frac{Rc^2}{\gamma M_0} - 1 \right)^2 - 1 = \frac{Rc^2}{\gamma M_0} \left(\frac{Rc^2}{\gamma M_0} - 2 \right) \quad (302),$$

und nun die Lichtablenkung gemäß (282):

$$\beta = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{Rc^2}{\gamma M_0} \left(\frac{Rc^2}{\gamma M_0} - 2 \right)}} \quad (303).$$

Bei Vernachlässigung der Terme von der Größenordnung ≈ 1 , folgt die Lehrbuchformel:

$$\beta_{\text{Newton}} = \frac{2\gamma M_0}{Rc^2} = \frac{2M}{R} = 8.75139294508179E-0001'' \quad (\gamma \text{ nach AGM, siehe Anhang C}) \quad (304).$$

Da wir wissen, dass der Einstein'sche Wert doppelt so groß sein muss, können wir schon einmal schummeln und unseren Newtonschen Wert mit 2 multiplizieren, das ergibt tatsächlich den Einstein'schen Wert von $1,75''$.

Lichtablenkung in der Schwarzschild-Metrik

Die Ausgangspunkte für die Berechnung der Lichtablenkung bilden die Schwarzschild-Metrik

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r}} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta)d\varphi^2) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)c^2 dt^2 \quad (305),$$

die nach dem affinen Parameter λ gebildete zugehörige Ableitung²⁰:

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\left(\frac{d\vartheta}{d\lambda}\right)^2 + \sin^2(\vartheta) \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 \right) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 \quad (306),$$

mit den Spezialisierungen:

²⁰ Da die Bewegung von Licht beschrieben werden soll, kann nicht nach der Eigenzeit abgeleitet werden.



$$\vartheta = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d\vartheta}{d\lambda} = 0 \quad (307),$$

sowie die Tatsache, dass Licht sich auf Nullgeodäten bewegt, d.h., dass

$$ds^2 = 0 \quad (308)$$

gilt, dann geht (306) in die Gleichung:

$$0 = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{d\lambda} \right)^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 \quad (309)$$

über. Mit der Ersetzung

$$u = \frac{1}{r} \quad (310),$$

und den bereits bekannten Erhaltungsgrößen, nebst ihren Beziehungen:

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = Bu^2$$

$$c \frac{dt}{d\lambda} = \frac{A}{1 - 2Mu} \quad (311),$$

$$\frac{dr}{d\lambda} = -B \frac{du}{d\varphi}$$

ergibt sich nach der folgenden kurzen Rechnung die Differentialgleichung, welche die Bewegung des Lichtes im Zentralfeld beschreibt. Zunächst folgt:

$$0 = \frac{1}{1 - 2Mu} B^2 \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 B^2 - \frac{A^2}{1 - 2Mu} \quad (312).$$

Die Multiplikation mit $(1 - 2Mu)$ und Division durch B^2 führt auf die Gleichung:

$$0 = \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 + u^2 - 2mu^3 - \frac{A^2}{B^2} \quad (313).$$

Diese Differentialgleichung könnte bereits integriert werden, aber die Integration ist schwierig, und die Interpretation der Ausdrücke ist es ebenso. Es ist daher einfacher, diese Gleichung noch einmal nach φ abzuleiten und dann eine störungstheoretische Näherungsrechnung durchzuführen. Die Ableitung ergibt:

$$0 = 2 \frac{du}{d\varphi} \cdot \frac{d^2u}{d\varphi^2} + 2u \frac{du}{d\varphi} - 6Mu^2 \frac{du}{d\varphi} \quad (314).$$



Die Division dieser Gleichung durch $2 \frac{du}{d\varphi}$ liefert die gesuchte Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = 3Mu^2 \quad (315).$$

Wir können jetzt diese Differentialgleichung als lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten näherungsweise interpretieren, wenn wir:

$$s(\varphi) = 3Mu_0^2 \quad (316)$$

als Störfunktion betrachten, wobei u_0 die Lösung der homogenen Gleichung sein soll, denn die homogene Gleichung spiegelt den gravitationsfreien Fall $M = 0$ wieder. Sie beschreibt die geradlinige Bewegung des Lichtes. Die Lösung ist eine Gerade und die Lichtablenkung ist auf Grund der Schwäche des Gravitationsfeldes gering. Man kann sich solche Verhältnisse leicht klar machen, wenn man an die klassischen Größen denkt, denn der Betrag des Newtonschen Gravitationspotentials an der Oberfläche der Sonne ist $1.8 \cdot 10^{11} \frac{m^2}{s^2}$, das sind nur $2 \cdot 10^{-4}$ Prozent der Lichtgeschwindigkeit. So tritt mit hinreichender Genauigkeit an die Stelle der Differentialgleichung (315) jetzt die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = s(\varphi) \quad (317).$$

Die Vorgehensweise entspricht einer störungstheoretischen Strategie. In dieser hat die Lösung von (315) die Form:

$$u = u_0 + h \quad (318),$$

und h ist als kleine Störung aufzufassen. Das Einsetzen in (315) bewirkt:

$$\frac{d^2 u_0}{d\varphi^2} + u_0 + \frac{d^2 h}{d\varphi^2} + h = 3Mu_0^2 + 3Mh^2 \quad (319).$$

Voraussetzungsgemäß ist u_0 eine Lösung der homogenen Gleichung und daher gilt:

$$\frac{d^2 u_0}{d\varphi^2} + u_0 = 0 \quad (320).$$

Da h voraussetzungsgemäß sehr klein sein soll, kann der Term $3Mh^2$ vernachlässigt werden. So wird aus (319) die genäherte Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 h}{d\varphi^2} + h = 3Mu_0^2 \quad (321),$$

die mit (317) identisch ist, wenn wir das Symbol h durch das Symbol u ersetzen.



Wir beginnen zuerst mit der Lösung der homogenen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten (320), indem wir mit dem Ansatz

$$u_0 = e^{\alpha \cdot \varphi} \quad (322)$$

starten. Die Ableitungen sind:

$$\begin{aligned} \frac{du_0}{d\varphi} &= \alpha \cdot e^{\alpha \cdot \varphi} \\ \frac{d^2 u_0}{d\varphi^2} &= \alpha^2 e^{\alpha \cdot \varphi} \end{aligned} \quad (323).$$

Wir finden die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung (320) durch Einsetzen von (322) und (323) in (320):

$$\begin{aligned} \alpha^2 \cdot e^{\alpha \cdot \varphi} + e^{\alpha \cdot \varphi} &= 0 \\ \alpha^2 + 1 &= 0 \end{aligned} \quad (324).$$

Mit (324) ist:

$$\begin{aligned} \alpha &= \pm j \\ j^2 &= -1 \end{aligned} \quad (325).$$

Für lineare homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung, bei welchen die Lösung der charakteristischen Gleichung auf einen komplexwertigen Exponenten:

$$\alpha = a + j \cdot b \quad (326)$$

führt, ist die Lösung dennoch reellwertig, sie lautet:

$$u_0 = e^{a \cdot \varphi} (C_1 \cos(b \cdot \varphi) + C_2 \sin(b \cdot \varphi)) = C \cdot e^{a \cdot \varphi} \sin(b \cdot \varphi + \varphi_0) \quad (327).$$

Unsere Lösung der charakteristischen Gleichung hat demnach die Parameter:

$$\begin{aligned} a &= 0 \\ b &= \pm 1 \end{aligned} \quad (328).$$

Dem entsprechend spezifiziert sich unsere Lösung mit $b = +1$ zu:

$$u_0 = C \cdot \sin(\varphi + \varphi_0) \quad (329).$$

Der Fall $b = -1$ entspricht nur einer Koordinatentransformation (Drehung) und ist für uns uninteressant. Wir können aber das Koordinatensystem so wählen, dass $\varphi_0 = 0$ ist, dann gilt:

$$u_0 = C \cdot \sin(\varphi) \quad (330).$$



Diese Wahl ist sehr bequem, denn für $\varphi = 0$ folgt unmittelbar $u_0 = 0$. Weil aber per Definition $u_0 = \frac{1}{r}$ ist, folgt $r \rightarrow \infty$. Der einfallende Lichtstrahl kommt daher aus der Richtung $\varphi = 0$.

Wir müssen nun noch über die Konstante C im Ausdruck (330) nachdenken. Setzen wir

$$C = \frac{1}{R} \quad (331),$$

dann lässt sich (330) in die einfach interpretierbare Form:

$$\frac{R}{r} = \sin(\varphi) \quad (332)$$

überführen. Erinnern wir uns nämlich an die Definition der Sinusfunktion oder noch besser daran, dass im rechtwinkligen Dreieck der Sinus eines Winkels das Verhältnis von Gegenkathete zur Hypotenuse ist und in unserem Fall R als die Kathete und r als die Hypotenuse fungiert, dann hat (332) eine ganz einfache geometrische Bedeutung. Die Größe R ist der minimale Abstand der Gerade (Lichtstrahl) vom Koordinatenursprung, d.h. R ist für unsere Fragestellung der Sonnenradius, da wir die Lichtablenkung am Sonnenrand berechnen möchten. Damit ist die Lösung der homogenen Gleichung endgültig:

$$u_0 = \frac{1}{R} \sin(\varphi) \quad (333).$$

Wir kommen nun zur Berechnung der Lichtablenkung im Rahmen der durch die Beziehung (317) gegebenen Näherung, jetzt unter Berücksichtigung von (333):

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{3M}{R^2} \sin^2(\varphi) \quad (334).$$

Grundsätzlich ist es naheliegend, mit einem Ansatz der Form:

$$u = \sum_{i=0} (A_i \cdot \sin^i(\varphi) + B_i \cdot \cos^i(\varphi)) \quad (335)$$

zu starten. Doch überlegt man sich, dass die homogene Lösung eine Sinusfunktion und die Störfunktion nur eine Sinusfunktion in der 2. Potenz ist, kann der Ansatz deutlich reduziert werden, wir setzen für eine partikuläre Lösung:

$$u_p = C_0 + A \cdot \sin^2(\varphi) + B \cdot \cos^2(\varphi) \quad (336)$$

an. Die allgemeine Lösung ergibt sich dann aus der Addition von partikulärer Lösung und der Lösung der homogenen Gleichung. Zunächst erhalten wir die folgenden Ableitungen:



$$\begin{aligned}\frac{du_p}{d\varphi} &= 2 \cdot A \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi) - 2 \cdot B \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\varphi) = \\ &= 2 \cdot (A - B) \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\varphi)\end{aligned}\quad (337).$$

$$\frac{d^2 u_p}{d\varphi^2} = 2 \cdot (A - B) \cdot (\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi))$$

Das Einsetzen in (334) ergibt:

$$\begin{aligned}2 \cdot (A - B) \cdot (\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)) + C_0 + A \cdot \sin^2(\varphi) + B \cdot \cos^2(\varphi) &= \\ = 2 \cdot (A - B) \cdot \cos^2(\varphi) - 2 \cdot (A - B) \cdot \sin^2(\varphi) + A \cdot \sin^2(\varphi) + B \cdot \cos^2(\varphi) + C_0 &= \\ = [2 \cdot (A - B) + B] \cdot \cos^2(\varphi) + [A - 2 \cdot (A - B)] \cdot \sin^2(\varphi) + C_0 = \frac{3M}{R^2} \sin^2(\varphi)\end{aligned}\quad (338).$$

Führen wir in der letzten Zeile einen Koeffizientenvergleich durch, dann finden wir das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned}2 \cdot (A - B) + B &= 0 \\ A - 2 \cdot (A - B) &= \frac{3M}{R^2} \\ C_0 &= 0\end{aligned}\quad (339).$$

Dieses System vereinfacht sich zu:

$$\begin{aligned}2 \cdot A - B &= 0 \\ -A + 2 \cdot B &= \frac{3M}{R^2}\end{aligned}\quad (340),$$

und als Lösung finden wir:

$$\begin{aligned}A &= \frac{M}{R^2} \\ B &= \frac{2M}{R^2}\end{aligned}\quad (341).$$

Die partikuläre Lösung ist somit:

$$u_p = \frac{M}{R^2} \sin^2(\varphi) + \frac{2M}{R^2} \cos^2(\varphi)\quad (342),$$

und die allgemeine Lösung ist dann:

$$u = u_0 + u_p = \frac{1}{R} \sin(\varphi) + \frac{M}{R^2} \sin^2(\varphi) + \frac{2M}{R^2} \cos^2(\varphi)\quad (343).$$

Mittels der Lösung (343) können wir nun endlich die Einstein'sche Lichtablenkung im Gravitationsfeld der Sonne ausrechnen. Zur Durchführung überlegen wir uns, dass für sehr kleine Winkel φ der Abstand r



sehr groß wird, so dass wir $u = 0$ setzen können. Betrachten wir die Reihenentwicklung der Winkelfunktionen für sehr kleine Winkel:

$$\begin{aligned}\sin(\varphi) &= \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \dots \\ \cos(\varphi) &= 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \dots\end{aligned}\tag{344},$$

dann können wir diese Reihenentwicklung ausnutzen und (343) wird zu:

$$u = \frac{1}{R}\varphi + \frac{M}{R^2}\varphi^2 + \frac{2M}{R^2}\tag{345}.$$

Da wegen der Kleinheit des Winkels φ^2 zu vernachlässigen ist, folgt unter Berücksichtigung von $u = 0$:

$$0 = \frac{1}{R}\varphi + \frac{2M}{R^2}\tag{346},$$

und das führt auf die Beziehung:

$$\varphi = -\frac{2M}{R}\tag{347}.$$

Das ist die Lichtablenkung, die ein Lichtstrahl erfährt, der aus dem Unendlichen kommend tangential auf den Sonnenrand trifft. Da die Lichtbahn symmetrisch ist, erfährt er die gleiche Ablenkung, während er sich wieder von der Sonne bis ins Unendliche entfernt. Der Betrag der Gesamtablenkung ist daher doppelt so groß und beträgt somit:

$$\beta_{ART} = \frac{4M}{R} = 1,75'' \quad (\gamma \text{ nach } AGM^{21}, \text{ siehe Anhang C})\tag{348}.$$

Vergleichen wir dieses Ergebnis mit (304), dann sehen wir, dass dieser Wert exakt doppelt so groß ist, wie der Newtonsche Wert. Wir wollen noch die Auswirkung der ungenauen Kenntnis der Newtonschen Gravitationskonstanten berücksichtigen, dann ergibt sich das folgende Intervall:

$$1.74913458907572'' < \beta_{ART} < 1.76034232495827''\tag{349}.$$

²¹ Der Computerwert mit $\gamma - AGM$ beträgt 1.75027487598759''.



Lichtablenkung in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Jetzt gehen wir von der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik:

$$ds^2 = \frac{1}{e^{-\frac{2M}{r}}} dr^2 + r^2 (d\mathcal{G}^2 + \sin^2(\mathcal{G})) - e^{-\frac{2M}{r}} c^2 dt^2 \quad (350)$$

aus. Die Ableitung nach dem affinen Parameter λ ist dann folgerichtig:

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = \frac{1}{e^{-\frac{2M}{r}}} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + r^2 \left(\left(\frac{d\mathcal{G}}{d\lambda}\right)^2 + \sin^2(\mathcal{G}) \right) - e^{-\frac{2M}{r}} c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 \quad (351).$$

Lichtstrahlen sollen auch in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik, bzw. in der singularitätsfreien allgemein-relativistischen Gravitationstheorie durch Null-Geodäten ($ds^2 = 0$) beschrieben werden. Das Koordinatensystem drehen wir wieder so, dass die Bewegung des Lichtstrahls genau in der durch $\mathcal{G} = \frac{\pi}{2}$

und $\frac{d\mathcal{G}}{d\lambda} = 0$ charakterisierten Ebene zu liegen kommt. Weiter verwenden wir die ebenfalls bereits

bekannten Beziehungen, bzw. Definitionen:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{r} \\ r^2 \frac{d\varphi}{d\lambda} &= B \rightarrow \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 = B^2 u^4 \\ e^{-\frac{2M}{r}} c \frac{dt}{d\lambda} &= A \rightarrow c^2 \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 = \frac{A^2}{(e^{-2Mu})^2} \\ \frac{dr}{d\lambda} &= -B \frac{d\varphi}{dr} \rightarrow \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = B^2 \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 \end{aligned} \quad (352).$$

Mit diesen Beziehungen bekommt (351) die Form:

$$0 = e^{2Mu} B^2 \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + B^2 u^2 - A^2 e^{2Mu} \quad (353).$$

Die Division durch $e^{2Mu} B^2$ ergibt:

$$0 = \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 e^{-2Mu} - \frac{A^2}{B^2} \quad (354).$$

Wie schon im Falle der Schwarzschild-Metrik, leiten wir diese Beziehung noch nach $d\varphi$ ab, um einerseits leichter integrieren zu können, aber vor allem auch deswegen, um die Differentialgleichung mit der Gleichung aus der Einstein'schen Theorie vergleichen zu können. Ganz analog erhalten wir dann:



$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + ue^{-2Mu} = Me^{-2Mu}u^2 \quad (355).$$

Diese Differentialgleichung unterscheidet sich ganz offensichtlich von der Einstein'schen Gleichung zur Beschreibung der Lichtablenkung im kugelsymmetrischen Gravitationsfeld, doch in schwachen Feldern, wie im Feld der Sonne, können diese Abweichungen vernachlässigt werden. Wir sehen das wieder sofort, wenn wir die Entwicklung der e-Funktion benutzen:

$$e^{-2Mu} = 1 - 2Mu + \frac{(-2mu)^2}{2!} + \frac{(-2Mu)^3}{3!} + \dots \quad (356),$$

dann wird bei Beschränkung auf die ersten beiden Terme aus (356) die Gleichung:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - 2Mu^2 = Mu^2 - 2M^2u^3 \quad (357),$$

und nach einfacher Umformung schließlich:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 3Mu^2 - 2M^2u^3 \quad (358).$$

Vernachlässigt man den Post-Einstein-Schwarzschild-Term $\propto u^3$, so folgt sofort die Einstein'sche ART-Gleichung für die Lichtablenkung an der Sonne. Zur Rechtfertigung der Vernachlässigung vergleichen wir die Termgrößen:

$$\begin{aligned} 3Mu^2 &= 9.13944447104740 \cdot 10^{-15} \\ 2M^2u^2 &= 1.29255691015257 \cdot 10^{-20} \end{aligned} \quad (359).$$

Der Zusatzterm macht nur 10^{-4} Prozent des Einstein'schen Terms aus. Auch dieser Unterschied ist leider nicht messbar. Allein das negative Vorzeichen in (358) verweist darauf, dass die Lichtablenkung geringfügig kleiner als nach der Allgemeinen Relativitätstheorie ausfällt. Aber dieser im Sonnensystem nicht messbare Effekt bewirkt in starken Gravitationsfeldern die Nichtexistenz einer Singularität. Zur Untersuchung dieser Fälle, ist aber die Formel (358) nicht anwendbar, weil sie nur für sehr große Abstände gilt.



Rotverschiebung elektromagnetischer Strahlung in der Newtonschen Gravitationstheorie²²

Die Elektrodynamik beschreibt die Bewegung des Lichtes im Vakuum als Bewegung mit stets konstanter Geschwindigkeit, d.h. das Licht verhält sich Lorentz-invariant und es besitzt die Ruhemasse Null. Die Newtonsche Mechanik und Newtonsche Gravitationstheorie sind dem gegenüber Galilei-invariant. Newtonsche Dynamik und Gravitationsphysik einerseits, sowie Lichtbewegung, bzw. Elektrodynamik andererseits sind nicht kompatibel. Im Grunde ist die Behandlung des Verhaltens elektromagnetischer Wellen im Rahmen einer newtonischen Theorie nicht nur nicht durchführbar, sondern geradezu **contradictio in adiecto** - ein Widersinn: Es gibt in der Newtonschen Physik nur Teilchen, denen keine Welleneigenschaften zugeordnet werden können. In der Elektrodynamik ist das Licht Welle und hat keine Teilcheneigenschaften. Man muss zur newtonischen Behandlung von Licht ein Newtonisches Lichtteilchen erfinden: Unterstellt man ein in irgendeiner Weise oszillierendes System, so ist eine solche „innere“ Oszillation nicht von der Geschwindigkeit des Systems selbst abhängig, d.h. die Frequenz ist konstant. Nach Newton wäre das Licht als Korpuskel mit einer Ruhemasse zu behandeln, welches durch die Arbeit gegen das Gravitationsfeld kinetische Energie verliert. Die Arbeit W , bzw. die Änderung dW , im Gravitationsfeld ist das Produkt der Kraft $\vec{K}(\vec{r})$, die entlang des Weges wirkt, aufzufassen:

$$dW = \vec{K}(\vec{r}) \bullet d\vec{s} \quad (360),$$

wobei der fett gedruckte Punkt als Skalarprodukt zu verstehen ist. Der Vektor $d\vec{s}$ zeigt in tangentialer Richtung bezüglich der Bahn des Lichtteilchens, also in Bewegungsrichtung. Gehen wir von einem kugelsymmetrischen Gravitationsfeld aus, dann bewirkt nur eine Bewegung in radialer Richtung, d.h. weg vom Gravitationszentrum, einen Arbeitsaufwand und damit eine Energieminderung, d.h. (360) in Kugelkoordinaten aufgeschrieben ergibt:

$$dW = K(r)dr \quad (361).$$

Ist E_0 die kinetische Anfangsenergie im Abstand r_0 , dann ist die kinetische Energie E_1 im Abstand r_1 bestimmt durch den entsprechenden Verlust:

$$E_1 = E_0 - \int_{r_0}^{r_1} K(r)dr \quad (362).$$

Durch Einsetzen des Betrages der Gravitationskraft erhalten wir:

$$E_1 = E_0 - \int_{r_0}^{r_1} \gamma \frac{mM_0}{r^2} dr = E_0 + \gamma \cdot m \cdot M_0 \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (363),$$

²² Das Anliegen dieser Schrift besteht nicht nur im Vergleich von Theorien und der Vermittlung mathematischer Einsichten sowie dem quantitativen Vergleich, sondern es geht auch und nicht zuletzt um ein Verständnis der Prinzipien (Naturgesetze) und ihrer Wirkmechanismen. Darum kann es gar keine Newtonsche Theorie geben, welche die Frequenzverschiebung beschreibt. Ohne Anleihen bei nicht Newtonschen Theorien geht das gar nicht, dass diese Anleihen funktionieren, ist eigentlich erstaunlich und wirft mehr Fragen als Antworten auf.



d.h., es ist:

$$\Delta E = E_1 - E_0 = \gamma \cdot m \cdot M_0 \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (364).$$

Setzen wir die Formel für die kinetische Energie ein, dann erhalten wir:

$$\frac{m}{2} c_1^2 - \frac{m}{2} c_0^2 = \gamma \cdot m \cdot M_0 \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (365),$$

bzw.

$$c_1^2 - c_0^2 = 2 \cdot \gamma \cdot M_0 \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (366).$$

Wir haben zwar das Glück, dass sich die unbekannte Lichtmasse auf Grund des Äquivalenzprinzips von Trägheit und Schwere weghebt, wir gewinnen aber nur eine Aussage über die Änderung der Lichtgeschwindigkeit. Erst, wenn wir den Zusammenhang:

$$c = \lambda \cdot \nu \quad (367),$$

zwischen Lichtgeschwindigkeit, Frequenz und Wellenlänge voraussetzen, gelingt es, eine Gleichung zu finden, welche die Wellengrößen mit der Gravitation verbindet:

$$\lambda_1^2 \cdot \nu_1^2 - \lambda_0^2 \cdot \nu_0^2 = 2 \cdot \gamma \cdot M_0 \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (368).$$

Wir stoßen sofort auf ein Problem der Mehrdeutigkeit, denn ein und dieselbe Geschwindigkeit ist als Produkt aus zwei Größen gegeben, d.h. eine kleine Wellenlänge und eine hohe Frequenz oder eine große Wellenlänge und eine kleine Frequenz können ein und dieselbe Geschwindigkeit ausdrücken. Wir dürfen hier nicht einfach die Vakuumlichtgeschwindigkeit als Naturkonstante (Invariante) ansetzen. Das wäre keine Newtonsche Physik! Das wäre auch sinnlos, denn es würde die Differenz (365) zu Null machen.

Denken wir uns ein Lichtteilchen als schwingendes System, wie oben beschrieben, dessen Trägheit nicht von seiner Geschwindigkeit abhängig ist, dann ist auch die Frequenz seiner Schwingungen unabhängig von seinem Bewegungszustand, d.h. wir können:

$$\nu_1 = \nu_0 = \nu \quad (369),$$

setzen und erhalten aus (368) eine Aussage über die Veränderung der Wellenlänge:

$$\lambda_1^2 - \lambda_0^2 = 2 \cdot \gamma \cdot M_0 \cdot \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \cdot \frac{1}{\nu^2} \quad (370).$$



Wir sehen hier, dass wegen $r_0 < r_1 \rightarrow \frac{1}{r_1} < \frac{1}{r_0}$ folgt, und das führt auf $\lambda_1 < \lambda_0$. Wir erhalten also das

unsinnige Resultat, dass die Wellenlänge abnimmt, wenn „Newtonsches Licht“ Bewegungsenergie verliert. Aber ist das wirklich unsinnig? Ganz und gar nicht! Ein Newtonsches Lichtteilchen verhält sich geradezu anschaulich, denn es darf jede beliebige Geschwindigkeit haben. Stellen wir uns vor, das Teilchen würde periodisch im Wechsel ein elektrisches Feld um sich aufbauen, während es ein magnetisches Feld abbaut und umgekehrt. Würden wir dann auf der gedachten Bahn die Punkte markieren, an denen es z.B. das elektrische Feld gerade vollständig abgebaut hat, dann wären bei konstanter Geschwindigkeit diese Punkte gleichmäßig wie auf einer Perlenschnur aufgereiht. Eine Wellenlänge entspräche der Strecke von Beginn bis Ende eines Zyklus. Der Abstand der Punkte von Zyklusstart zu Zyklusstart, wäre umso größer, je schneller sich dieses Newtonsche Lichtteilchen bewegt, während alle Punkte aufeinander liegen würden (Wellenlänge Null), wenn wir dieselbe Geschwindigkeit wie dieses Teilchen hätten, wenn das Teilchen also in unserem Bezugssystem ruhen würde. Das ist eine sehr einfache und anschauliche Vorstellung. Eine strenge Newtonsche Rechnung erfordert Voraussetzungen und führt auf Resultate, welche mit der Natur elektromagnetischer Wellen allerdings völlig unverträglich sind. Doch so gesehen erscheint das Newtonsche Lichtteilchen einfach verständlich, während sich das reale Lichtteilchen gemäß den Gesetzen der Maxwellschen Theorie oder der Quantenmechanik (wir kommen gleich drauf) scheinbar völlig absurd verhält²³.

Gibt es andere Möglichkeiten, die Rotverschiebung im Newtonschen Gravitationsfeld realer zu behandeln? Wir könnten versucht sein, Kredit bei der Quantenphysik aufzunehmen:

$$\Delta E = E_1 - E_0 = h \cdot (\nu_1 - \nu_0) \quad (371).$$

Dass das Licht sich so verhält, war Einsteins Lichtquantenhypothese von 1905. Ein Energieverlust durch Arbeit gegen das Gravitationsfeld würde sich dann als Verkleinerung der Frequenz geltend machen. Diese erfolgversprechende Aussicht führt uns dazu, dass wir die Arbeit

$$dW = \gamma \frac{m \cdot M_0}{r^2} dr \quad (372)$$

neu berechnen müssen. Doch dazu müssen wir die passive schwere Masse m des Lichtes kennen, und wir müssen unterstellen, dass diese von Null verschieden ist. Nehmen wir dazu einen Kredit bei der Speziellen Relativitätstheorie auf und ziehen die Masse-Energie-Äquivalenz heran, so müssen wir die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit voraussetzen. Insofern das Licht Arbeit gegen das Gravitationsfeld leistet und dadurch Bewegungsenergie verliert, muss:

$$\Delta E = E_1 - E_0 = m(r_1) \cdot c^2 - m(r_0) \cdot c^2 \quad (373)$$

gelten, d.h., die Masse muss ortsabhängig sein. Genau aus diesem Grund ist es nicht möglich, das Resultat (363) zu verwenden, es muss

²³ Damit ist die wissenschaftstheoretische Behauptung, eine Theorie muss einfach sein, um richtig zu sein, praktisch widerlegt. Die Natur richtet sich in keiner Weise nach unseren Wünschen und Vorstellungen von Einfachheit und Schönheit. Sie ist wie sie ist und mathematische oder anschauliche Schwierigkeiten kennt sie gar nicht. Sie führt ebenfalls nicht Buch über die Anzahl der Prinzipien, die ihre Natur regulieren. Ockhams Rasiermesser gehört in den Papierkorb für philosophisches Wunschdenken.



$$dW = \gamma \frac{m(r) \cdot M_0}{r^2} dr \quad (374)$$

verwendet werden. Doch eine Integration von (374) ist nicht einfach möglich, da die Funktion $m(r)$ gar nicht bekannt ist. Wir wissen aber, dass

$$dE = -dW \quad (375)$$

ist, d.h. die verrichtete Arbeit reduziert die Energie – darum das negative Vorzeichen. Wir benutzen unseren Kredit bei der Quantenmechanik:

$$dE = h \cdot d\nu \quad (376),$$

indem wir (374), (375) und (376) zusammenführen, was auf:

$$h \cdot d\nu = -\gamma \frac{m(r) \cdot M_0}{r^2} dr \quad (377)$$

führt. Aufgrund unserer Anleihe bei der Speziellen Relativitätstheorie können wir setzen:

$$m(r) = \frac{E(r)}{c^2} \quad (378).$$

Wir erhöhen den Kredit bei der Quantenmechanik weiter mittels:

$$E(r) = h \cdot \nu(r) \quad (379),$$

und erhalten so:

$$m(r) = \frac{h \cdot \nu(r)}{c^2} \quad (380),$$

eingesetzt in (377) ergibt das:

$$h \cdot d\nu = -\gamma \frac{h \cdot \nu(r) \cdot M_0}{c^2 \cdot r^2} dr \quad (381),$$

das liefert die Differentialgleichung erster Ordnung für die Funktion $\nu(r)$:

$$\frac{d\nu}{dr} + \gamma \frac{M_0}{c^2} \frac{1}{r^2} \nu = 0 \quad (382).$$

Diese Differentialgleichung kann durch Trennung der Variablen gelöst werden:

$$\int_{\nu_0}^{\nu_1} \frac{1}{\nu} d\nu = -\gamma \frac{M_0}{c^2} \int_{r_0}^{r_1} \frac{1}{r^2} dr \quad (383).$$

Die Integration führt auf:



$$\ln|\nu_1| - \ln|\nu_0| = \gamma \frac{M_0}{c^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (384),$$

bzw.

$$\ln \frac{\nu_1}{\nu_0} = \gamma \frac{M_0}{c^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (385),$$

und schließlich auf:

$$\nu_1 = \nu_0 \cdot e^{\gamma \frac{M_0}{c^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right)} \quad (386).$$

Für sehr kleine Abstandsdifferenzen kann die Exponentialfunktion in bekannter Weise linear genähert werden, dann folgt an Stelle von (386) die Beziehung:

$$\nu_1 = \nu_0 \left(1 + \gamma \frac{M_0}{c^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \right) \quad (387).$$

Aus $r_1 > r_0$ folgt, dass der Faktor, mit dem die Frequenz ν_0 multipliziert wird, selbst kleiner als 1 ist, und das ergibt $\nu_1 < \nu_0$. Das Licht hat tatsächlich Energie verloren. Betrachten wir abschließend einen kleinen Höhenunterschied h auf der Erdoberfläche (Erdradius sei R), d.h.:

$$\begin{aligned} r_0 &= R \\ r_1 &= R + h \end{aligned} \quad (388),$$

dann kann (387) umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \nu_1 - \nu_0 &= -\nu_0 \cdot \gamma \frac{M_0}{c^2} \cdot \frac{h}{(R+h) \cdot R} = -\nu_0 \cdot \gamma \frac{M_0}{R^2} \cdot h \cdot \frac{1}{c^2 \left(1 + \frac{h}{R} \right)} = \\ &= -\nu_0 \cdot g \cdot h \cdot \frac{1}{c^2 \left(1 + \frac{h}{R} \right)}, \end{aligned} \quad (389)$$

$$g = \gamma \frac{M_0}{R^2}$$

mit der Fallbeschleunigung g an der Erdoberfläche. Die Beziehung (389) ist die Beziehung, die R.V. Pound und G.A. Rebka, Jr. in ihrem Experiment²⁴ geprüft haben. Unter Nutzung des Mößbauer-Effektes, bewegten sie eine Strahlungsquelle (Isotop ^{51}Fe) im Keller eines Hochhauses so, dass die durch die Bewegung hervorgerufene Dopplerverschiebung genau dem Energieverlust der Photonen zum Erreichen

²⁴ „GRAVITATIONAL RED-SHIFT IN NUCLEAR RESONANCE“, PHYSIKAL REVIEW LETTERS, Vol. 3, Number 9., 1. November 1959.



des Empfängers in $22,5m$ Höhe entsprach. Dabei konnte die Beziehung (389) mit einer Ungenauigkeit von 1% bestätigt werden. In der Einleitung zu ihrer Publikation schrieben die Autoren:

„The several theories of relativity predict the frequency to be proportional to the gravitational potential.“

Diese Bemerkung ist darum von Bedeutung, weil diese Arbeit von Pound und Rebka regelmäßig als eine Bestätigung der Allgemeinen Relativitätstheorie dargestellt wird. Dabei haben die Autoren vollkommen richtig darauf hingewiesen, dass sie einen Effekt überprüfen, den *“several theories of relativity”* behaupten. Die Beziehung (389) setzt ein Newtonsches und nahezu konstantes²⁵ Gravitationspotential, die Spezielle Relativitätstheorie und die Einstein'sche Beziehung aus der Lichtquantenhypothese (die natürlich keine Hypothese mehr ist) voraus. Die Beziehung (389) markiert einen Grenzfall, den jede sinnvolle relativistische Gravitationstheorie enthalten muss, da sie sonst als widerlegt anzusehen ist. Die spezifische allgemein-relativistische Beschreibung der Frequenzverschiebung ist durch das Experiment von Pond und Rebka nicht geprüft worden, weil dann das radiusabhängige Profil der Frequenzverschiebung Gegenstand der Untersuchung hätte sein müssen. Es sei auch angemerkt, dass die Formel (386) keine allgemein-relativistische Formel ist, wie wir noch sehen werden, wenn wir die Rotverschiebung aus der Allgemeinen Relativitätstheorie herleiten. Und auch in der ART kommen wir erst durch eine Näherung auf (389). Gleiches gilt für die singularitätsfreie allgemein-relativistische Gravitationstheorie.

Rotverschiebung elektromagnetischer Strahlung in der Schwarzschild-Metrik

Die Messung der Frequenz einer Schwingung an einem bestimmten Ort erfolgt mittels einer an diesem Ort befindlichen ruhenden Uhr. Die Uhr ist ein physikalisches System, dessen Trägheitseigenschaften mit den metrischen Verhältnissen dieses Ortes verknüpft sind. Aus diesem Grund wird eine solche Uhr nicht die Koordinatenzeit t , sondern die Eigenzeit τ anzeigen. Zwischen der Eigenzeit τ und der Koordinatenzeit t besteht der universelle Zusammenhang:

$$\Delta\tau = \sqrt{-g_{44}} \cdot \Delta t \quad (390).$$

Aus diesem Grund ist auch der Zusammenhang zwischen der Frequenz ν einer monochromatischen Welle und der Koordinatenzeit durch die Beziehung:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \frac{\Delta t}{\Delta\tau} = \frac{\omega}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{-g_{44}}} \quad (391)$$

gegeben. Dieser Zusammenhang gilt für alle metrischen Theorien der Gravitation, speziell für die äußere Schwarzschild-Metrik hat die Komponente g_{44} die Gestalt:

²⁵ Das Gravitationspotential ist nahezu konstant, weil $1 + \frac{h}{R} \approx 1$ ist. Die $22,5m$ - Strecke ist eben verschwindend klein gegenüber dem Erdradius, und das macht sogar diesen Faktor in der Formel überflüssig.



$$g_{44} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \quad (392),$$

wie wir wissen, wenn wir uns die Schwarzschild-Metrik anschauen. Vergleichen wir die Frequenz einer monochromatischen Welle in zwei verschiedenen Abständen r_0 und r_1 , dann ergibt sich für deren Verhältnis:

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} = \frac{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_0}}}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r_1}}} \quad (393).$$

Um (393) als Näherung auszudrücken, entwickeln wir die folgende Funktion als Reihe für kleine x -Werte bis zur ersten Potenz:

$$f(x) = \sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x \quad (394).$$

Dieses Ergebnis liefert eine erste Näherung für (393):

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} \approx \frac{1 - \frac{M}{r_0}}{1 - \frac{M}{r_1}} \quad (395).$$

Führen wir mit (395) eine Polynomdivision durch und verwenden schließlich nur die Terme in nullter und erster Ordnung, dann folgt:

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} \approx 1 - \frac{M}{r_0} : 1 - \frac{M}{r_1} \approx 1 - \frac{M}{r_0} + \frac{M}{r_1} = 1 + M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) = 1 + \gamma \frac{M_0}{c^2} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right) \quad (396),$$

wobei wir M definitionsgemäß substituiert haben, weil wir dadurch sofort die Beziehung (387) wieder erkennen können, über die wir ausführlich geschrieben haben.

Rotverschiebung elektromagnetischer Strahlung in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Auf Grund der bisherigen Ausführungen ist es nun ein Leichtes, auch noch die Formel für die Rotverschiebung herzuleiten, wie sie aus der singularitätsfreien allgemein-relativistischen Gravitationstheorie folgt. Die dafür erforderliche Komponente des metrischen Tensors ist:

$$g_{44} = -e^{-\frac{2M}{r}} \quad (397).$$



Benutzen wir wieder die allgemeine Beziehung (391) für die Frequenzen und bilden damit das Verhältnis der Frequenzen für unterschiedliche Radien, dann finden wir:

$$\frac{\nu_1}{\nu_0} = e^{M \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right)} \quad (398).$$

Der Autor selbst hat nicht schlecht gestaunt, bei diesem Ergebnis, ist (398) doch exakt die Beziehung (386), welche wir unter den dort erläuterten Voraussetzungen erhalten hatten. Wir müssen hier also gar nicht weiter die Näherungen behandeln, weil wir das längst getan haben. Das ist aber gar nicht das entscheidende, obwohl damit nachgewiesen ist, dass auch die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik mit den Ergebnissen von Pound und Rebka verträglich ist. Das wichtige Resultat besteht darin, dass wir neben der Einstein'schen Beziehung $E = m \cdot c^2$ aus dem Jahre 1905 auch die Beziehung $E = h \cdot \nu$ aus Einsteins Lichtquantenhypothese von 1905 verwendet haben, wobei die letzte Beziehung eine quantenmechanische Beziehung ist. Die Herleitung suggeriert zwar den Gedanken, dass wir uns in der Speziellen Relativitätstheorie befinden. Dem ist aber nicht so, denn die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik ist in der Tat keine euklidische Metrik. Das liegt daran, dass wir bei ihrer Konstruktion, den aus der Schwarzschild-Metrik ablesbaren speziellen Zusammenhang:

$$g_{11} = - \frac{1}{g_{44}} \quad (399)$$

von Anfang an berücksichtigt haben. Ohne (398) wäre nur die Zeit-Zeit-Komponente gravitativ verändert, was nicht zulässig, bzw. inkonsequent gewesen wäre.

Last but not least, die Gravitation (Metrik) steht offenbar in einer engen Beziehung zur Quantenphysik, was wir bei ihrer Konstruktion überhaupt nicht gewusst haben. Niemand hat das so erwartet, denn Quanten haben eine kleine Masse, für sie ist die Bedeutung der Quantenbeziehung evident, doch wer denkt im Zusammenhang mit der Planetenbewegung und ihren Gesetzen über eine Beziehung zur Quantenmechanik nach? Es war ein rein mathematisches Experiment, welches wir unternommen haben, die Schwarzschild-Metrik der ART ganz leicht zu korrigieren, so dass keine Singularitäten auftreten, dass es hier eine Beziehung zur Quantenphysik geben könnte, war überhaupt nicht abzusehen. Aber damit hat nun die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik sogar ein physikalisches Fundament erhalten. Wir werten das als einen Hinweis auf tiefer liegende fundamentale Beziehungen zwischen den beiden Fundamenten der Physik: der Gravitation auf der einen und der Quantenphysik auf der anderen Seite.

Newton'sche, Einstein'sche und Post-Einstein'sche Kreiselbewegung

Die Behandlung der Kreisbewegung ist vor dem Hintergrund essentieller Unterschiede von Bedeutung. Eines der aktuell bedeutendsten Rätsel der Astro- und Teilchenphysik ist das der so genannten Dunklen Materie (DM). Während unter Beachtung der Massenverteilung der sichtbaren Materie mit der Geometrie einer Scheibe bis zu einem Abstand von 15kpc die Rotation der Milchstraße auf Basis der



Newtonschen und Einstein'schen Gravitationstheorie ohne die Annahme einer hypothetischen Dunklen Materie beschrieben werden kann, scheinen intergalaktische Phänomene und Annahmen über die kosmologische Strukturbildung eine solche Materie zu erfordern, wenn die Allgemeine Relativitätstheorie als universell gültige Gravitationstheorie vorausgesetzt wird – so die allgemein akzeptierte Lehrmeinung. Eine alternative Deutungsmöglichkeit würde bestehen, wenn eine alternative Gravitationstheorie in der Lage wäre, die entsprechenden Phänomene zu erklären. Leider bricht die extra für diesen Zweck entwickelte Theorie, die Modifizierte Newtonsche Dynamik (MOND), mit dem extrem gut abgesicherten schwachen Äquivalenzprinzip. In der klassischen Fassung von MOND liefert diese Theorie nur unter falschen Voraussetzungen für die Verteilung der sichtbaren Materie korrekte Rotationskurven²⁶. Daher genießt MOND keine Evidenz²⁷.

Wir behandeln die Kreisbewegung, weil wir bereits in der Diskussion des quasi-klassischen Grenzfalls Argumente für einen DM-Effekt gefunden haben. Wir wollen daher jetzt exakt rechnen und behandeln darum die Kreisbewegung im Zentralfeld im Rahmen der 3 oben genannten Theorien, indem wir die Ausdrücke für die Winkelgeschwindigkeit berechnen und vergleichen.

Die Kreisbewegung im klassischen Newtonschen Zentralfeld

Die Kreisbewegung im klassischen Newtonschen kugelsymmetrischen Gravitationsfeld ist der einfachste Fall einer Planetenbewegung. Das Ergebnis ist schulisches Allgemeinwissen. Wir führen hier die Rechnung exemplarisch aus, uns interessiert aber eigentlich nur das Ergebnis für die Vergleichswecke.

Zunächst wählen wir die Orientierung unseres Kugelkoordinatensystems, dann setzen wir die Kreisbahnbedingungen, d.h.:

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= 0 \\ \dot{\mathcal{G}} &= 0 \\ r &> 0 \\ \dot{r} &= 0\end{aligned}\tag{400}.$$

Die Funktion $\dot{\phi}(r, M)$ ist gesucht. Verwenden wir die Bewegungsgleichung (78), der wir hier aus Lesbarkeitsgründen eine neue Nummer geben:

$$\ddot{r} - r\dot{\mathcal{G}}^2 - r\sin^2(\mathcal{G})\dot{\phi}^2 = -\frac{Mc^2}{r^2}\tag{401},$$

²⁶ K. Retzlaff, Keine Dunkle Materie in der Milchstraße bis 15kpc, Publikation der Astronomischen Gesellschaft Magdeburg e.V., 13.1.2013, zu finden unter: <http://astronomie-magdeburg.de/keine-dunkle-materie-in-der-milchstrasse-bis-15kpc-abschaetzung-der-gesamtmasse-und-spiralarmstrukturen.html>

²⁷ siehe hierzu auch: <http://astronomie-magdeburg.de/wp-content/uploads/2017/01/MOND-Simulation.pdf>, sowie <http://astronomie-magdeburg.de/wp-content/uploads/2017/01/DyskalkulieInderMilchstrasse.pdf>



mit der Abkürzung $M = \gamma \frac{M_0}{c^2}$, und setzen wir in die Gleichung (401) die Bedingungen (400) ein, dann folgt unmittelbar:

$$r\dot{\phi}^2 = \frac{Mc^2}{r^2} \quad (402),$$

und daraus der gesuchte Zusammenhang:

$$\dot{\phi} = \dot{\phi}_{Newton} = \sqrt{\frac{Mc^2}{r^3}} \quad (403).$$

Auf diese Beziehung werden wir in den folgenden Kapiteln immer wieder zurückkommen.

Die Beschreibung der Abweichungen von der Newtonschen Rotation im kugelsymmetrischen Zentralfeld

In Anlehnung an die Beziehung der Newtonschen Kreisbewegung (403) führen wir nun die Abweichungsfunktion $\chi(r, M)$ ein. Diese Funktion definieren wir über die Beziehung:

$$\dot{\phi} = \chi(r, M) \cdot \dot{\phi}_{Newton} \quad (404).$$

Es ist die Aufgabe der folgenden beiden Kapitel, diese Funktion für die Kreisbewegung in der Schwarzschild-Metrik und für die Kreisbewegung in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik herzuleiten.

In der Newtonsche Gravitationstheorie gilt für diese Funktion per Definition:

$$\chi(r, M)_{Newton} = 1 \quad (405),$$

d.h., sie ist von r und M unabhängig.

Die Kreisbewegung in der Schwarzschild-Metrik der Allgemeinen Relativitätstheorie

Auch in der Schwarzschild-Metrik der ART verwenden wir, wie bereits gewohnt, die Spezialisierungen (399) und (400). Gehen wir damit in die Bewegungsgleichung (24) ein, dann erhalten wir die vereinfachte Beziehung:

$$-r\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \cdot \dot{\phi}^2 + \frac{M}{r}\left(1 - \frac{2M}{r}\right)(\dot{x}^4)^2 = 0 \quad (406)$$



um die Größe \dot{x}^4 zu eliminieren, verwenden wir wieder die aus der Energieerhaltung (163) folgende Beziehung:

$$\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \cdot \dot{x}^4 = A \quad (407),$$

durch Umstellen und Einsetzen erhalten wir:

$$-r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \cdot \dot{\phi}^2 + \frac{M}{r^2} \frac{A}{1 - \frac{2M}{r}} = 0 \quad (408),$$

und nach weiterem Umstellen schließlich:

$$\dot{\phi} = \frac{A}{1 - \frac{2M}{r}} \sqrt{\frac{M}{r^3}} \quad (409).$$

Wir wissen, dass A eine konstante Größe ist. Aber jedem möglichen A entspricht ein bestimmter Abstand bei gegebener Zentralmasse. Aus diesem Grunde müssen wir $A(r, M)$ erst noch bestimmen, um die endgültige Beziehung zu erhalten. Man kann sich auch überlegen, dass anderenfalls (409) einen Widerspruch zum schwachen Äquivalenzprinzip bedeuten würde, weil unterschiedliche Kreisbahngeschwindigkeiten zu einem gegebenen Abstand möglich wären. Dies wäre aber ein Verstoß gegen das Geodätenprinzip, was nur ein anderer Ausdruck für das schwache Äquivalenzprinzip ist.

Die Bestimmung von A : Mit der Beziehung (207) haben wir den Zusammenhang zwischen dem Energieparameter, dem Aphel und dem Perihel gefunden. Hier noch einmal zur Erinnerung:

$$A^2 = c^2 \left(1 - \frac{2M}{r_{\text{Perihel}}}\right) + \frac{2Mc^2 \left(\frac{1}{r_{\text{Perihel}}} - \frac{1}{r_{\text{Aphel}}}\right) \left(1 - \frac{2M}{r_{\text{Perihel}}}\right)}{\frac{\frac{r_{\text{Perihel}}}{r_{\text{Perihel}}^2} - \frac{r_{\text{Aphel}}}{r_{\text{Aphel}}^2}}{\frac{r_{\text{Perihel}}}{r_{\text{Perihel}}^2} - \frac{r_{\text{Aphel}}}{r_{\text{Aphel}}^2}}} \quad (410).$$

Diese Beziehung ist einerseits sehr unhandlich. Andererseits ist die Kreisbewegung ein Spezialfall von (410), nämlich für:

$$r_{\text{Aphel}} = r_{\text{Perihel}} = r \quad (411).$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, führt aber die Setzung (411) auf eine Unstetigkeitsstelle der Form $\frac{0}{0}$, die aber bei genauem Hinsehen nur eine Lücke, keine Pol- oder Sprungstelle darstellt. Aus diesem Grunde können wir (410) nutzen, indem wir eine stetige Ersatzfunktion bestimmen (Abiturienten fragen sich ja oft, wozu solche Rechnungen nützlich seien – hier haben wir ein schönes Beispiel dafür). Für die konkrete Rechnung definieren wir:



$$A^2 = c^2 \left(1 - \frac{2M}{r_{\text{Perihel}}} \right) + f(r_{\text{Aphel}}, r_{\text{Perihel}}) \frac{1 - \frac{2M}{r_{\text{Perihel}}}}{r_{\text{Perihel}}^2} \cdot 2Mc^2 \quad (412).$$

Es ist also nur eine Grenzwertuntersuchung für $f(r_{\text{Aphel}}, r_{\text{Perihel}})$ vorzunehmen, weil nur diese Funktion unstetig ist. Wir müssen nun weitere Abkürzungen einführen:

$$r = r_{\text{Aphel}} = r_{\text{Perihel}} + h \quad (413).$$

Mit diesen Abkürzungen erhalten wir die Funktion $f(r, h)$:

$$f(r, h) = \frac{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+h} \right)}{\frac{1 - \frac{2M}{r}}{r^2} - \frac{1 - \frac{2M}{r+h}}{(r+h)^2}} \quad (414).$$

Der wuselige Ausdruck (414) ist zunächst in eine besser auswertbare Form zu bringen. Nach etwas Rechnung erhalten wir:

$$f(r, h) = \frac{Z(r, h)}{N(r, h)} = \frac{r^2 (r+h)^2 h}{(r+h)^3 (r-2M) - r^3 (r+h-2M)} \quad (415).$$

Es ist ausreichend, nur den Nenner auszuwerten. Nach fleißiger Auflösung der Klammern, wobei wir nur soweit gehen, dass wir den Faktor h in jedem verbleibendem Term erhalten, um dann zu kürzen, finden wir:

$$N(r, h) = h \cdot 2r^3 + h \cdot (3h - 6M)r^2 + h \cdot (h^2 - 6Mh)r - h \cdot 2Mh^2 \quad (416).$$

Nun ist offensichtlich, dass wir kürzen können, das ergibt:

$$f(r, h) = \frac{r^2 (r+h)^2}{2r^3 + (3h - 6M) \cdot r^2 + (h^2 - 6Mh) \cdot r - 2Mh^2} \quad (417).$$

Jetzt ist der gesuchte Grenzwert leicht bestimmbar:

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(r, h) = \frac{r^4}{2r^3 - 6Mr^2} = \frac{r^2}{2r - 6M} = \frac{r}{2 \left(1 - \frac{3M}{r} \right)} \quad (418).$$

Die letzte Umformung, ganz rechts, ist eigentlich nicht nötig, aber man sieht sehr schön, dass für $r = 3M$ eine Singularität folgt. Sie besagt, dass in diesem Fall $A^2 \rightarrow \infty$ folgt, und das bedeutet, dass es ab dieser Stelle keine Kreisbahnen mehr geben kann – wenn die ART gilt.

Mit dem Ergebnis (418) folgt nun für den Energieparameter endlich:



$$A^2 = c^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) + \frac{r^2}{2(r-3M)} \frac{1 - \frac{2M}{r}}{r^2} \cdot 2Mc^2 \quad (419).$$

Setzen wir endlich die Wurzel aus (419) in den Ausdruck (409) ein, dann finden wir das Resultat:

$$\dot{\phi}_{ART} = \sqrt{\frac{1 + \frac{M}{r-3M}}{1 - \frac{2M}{r}}} \sqrt{\frac{Mc^2}{r^3}} \quad (420).$$

Unsere gesuchte Funktion ist also:

$$\chi(r, M)_{ART} = \sqrt{\frac{1 + \frac{M}{r-3M}}{1 - \frac{2M}{r}}} \quad (421).$$

Wir werden diese Funktion später mit den entsprechenden anderen Funktionen vergleichen.

Die Kreisbewegung in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik der singularitätsfreien allgemeinen-relativistischen Gravitationstheorie

Wie in der ART gehen wir von der Bewegungsgleichung aus, natürlich jetzt von der aus der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik folgenden, nämlich Nummer (50):

$$\ddot{r} - \frac{M}{r^2} \dot{r}^2 - re^{-\frac{2M}{r}} \dot{\vartheta}^2 - r \sin^2(\vartheta) e^{-\frac{2M}{r}} \dot{\phi}^2 + \frac{M}{r^2} e^{-\frac{4M}{r}} (\dot{x}^4)^2 = 0 \quad (422).$$

Die Koordinatenwahl (399) und die Beschränkung auf die Kreisbewegung (400) reduziert (422) auf:

$$-r \cdot e^{-\frac{2M}{r}} \dot{\phi}^2 + \frac{M}{r^2} e^{-\frac{4M}{r}} (\dot{x}^4)^2 = 0 \quad (423).$$

Wir nutzen die Beziehung (226) mit der Energieerhaltung

$$e^{-\frac{2M}{r}} \dot{x}^4 = A \quad (424),$$

um \dot{x}^4 zu eliminieren, indem wir entsprechend umstellen und in (423) einsetzen, dann erhalten wir durch Umstellen nach der Winkelgeschwindigkeit bereits die Beziehung:



$$\dot{\phi} = Ae^{\frac{M}{r}} \sqrt{\frac{M}{r^3}} \quad (425).$$

Auch hier muss der Energieparameter für den zugehörigen Abstand ermittelt werden.

Bestimmung der Energieparameters: Wegen der Kreisbahnbedingung $\dot{r} = 0$ setzen wir das Quadrat der Beziehung (229) Null:

$$0 = A^2 - \left(c^2 + \frac{B^2}{r^2} \right) \cdot e^{-\frac{2M}{r}} \quad (426),$$

und umgestellt nach A^2 ergibt:

$$A^2 = \left(c^2 + \frac{B^2}{r^2} \right) \cdot e^{-\frac{2M}{r}} \quad (427).$$

In der Beziehung (427) ist noch der Drehimpulsparameter B zu eliminieren. Um ihn zu bestimmen, können wir das folgende Gleichungssystem benutzen:

$$\begin{aligned} 0 &= A^2 - \left(c^2 + \frac{B^2}{r_{Aphel}^2} \right) \cdot e^{-\frac{2M}{r_{Aphel}}} \\ 0 &= A^2 - \left(c^2 + \frac{B^2}{r_{Perihel}^2} \right) \cdot e^{-\frac{2M}{r_{Perihel}}} \end{aligned} \quad (428).$$

Dieses Gleichungssystem führt uns auf die Lösung:

$$\begin{aligned} B^2 &= c^2 \frac{1 - \zeta}{\frac{1}{r_{Perihel}^2} - \frac{1}{r_{Aphel}^2}} \\ \zeta &= e^{-2M \left(\frac{1}{r_{Perihel}} - \frac{1}{r_{Aphel}} \right)} \end{aligned} \quad (429).$$

Das Problem, dass für die Kreisbewegung das Aphel in das Perihel übergeht und damit eigentlich aus den zwei Gleichungen (428) nur eine Gleichung wird, die wir dann gar nicht lösen könnten, weil für die gesuchte Größe wieder eine Division $\frac{0}{0}$ folgen würde, lösen wir wieder durch den Trick einer

Grenzwertrechnung. Dazu setzen wir wieder:

$$r_{Aphel} = r_{Perihel} + h = r + h \quad (430),$$

und damit ergibt sich:



$$B^2 = c^2 \frac{Z(h)}{N(h)}$$

$$Z(h) = 1 - e^{-2M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+h} \right)} \quad (431).$$

$$N(h) = \frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+h)^2}$$

Um den Grenzwert auszurechnen, nutzen wir die Regel von l'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (432).$$

Aus diesem Grunde bilden wir zunächst die Ableitungen der Zähler- und der Nennerfunktion von (431), um im Anschluss daran, den Grenzübergang durchzuführen:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d}{dh} Z(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2M}{(r+h)^2} e^{-2M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+h} \right)} = \frac{2M}{r^2} \quad (433).$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d}{dh} N(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{(r+h)^3} = \frac{2}{r^3}$$

Damit folgt für die Kreisbewegung:

$$B^2 = c^2 \cdot M \cdot r \quad (434).$$

Zur Bestimmung des Energieparameters setzen wir dieses Resultat in (427) ein, dann folgt:

$$A^2 = c^2 \left(1 + \frac{M}{r} \right) \cdot e^{-\frac{2M}{r}} \quad (435),$$

und damit:

$$A = c \sqrt{1 + \frac{M}{r}} \cdot e^{-\frac{M}{r}} \quad (436).$$

Wir haben beim Wurzelziehen nur das positive Vorzeichen verwendet, weil das Vorzeichen nur die Drehrichtung reguliert, die wir positiv wählen. Durch Einsetzen in (425) bekommen wir endgültig:

$$\dot{\phi}_{PES} = \sqrt{1 + \frac{M}{r}} \cdot \sqrt{\frac{Mc^2}{r^3}} \quad (437),$$

und wir lesen die gesuchte Funktion $\chi(r, M)$ ab:

$$\chi_{PES}(r, M) = \sqrt{1 + \frac{M}{r}} \quad (438).$$



Vergleich der Abweichungsfunktionen $\chi(r, M)$

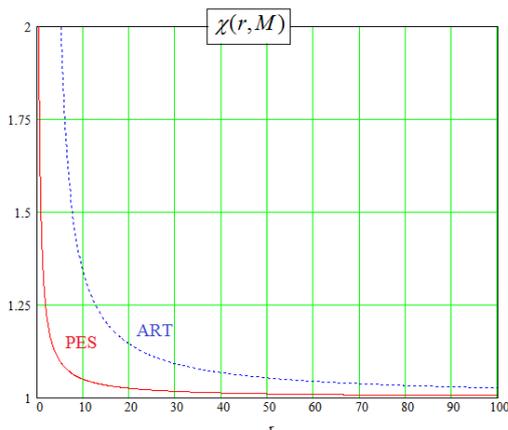
Zusammengefasst haben wir die folgenden Funktionen zu vergleichen:

Newton $\chi_{Newton}(r, M) = 1$

ART
$$\chi_{ART}(r, M) = \sqrt{\frac{1 + \frac{M}{r-3M}}{1 - \frac{2M}{r}}}$$

PES
$$\chi_{PES}(r, M) = \sqrt{1 + \frac{M}{r}}$$

Wir erkennen sofort, dass für $r \gg 3M$ die Funktionen, welche die Abweichung von der Newtonschen Kreisbewegung beschreiben, sich erstens ähnlich verhalten und sogar ineinander übergehen, und, dass sie zweitens fern der Singularitäten auf jeden Fall größer als 1 sind. Das ist bedeutsam, da in



Computersimulationen zur galaktischen Rotation in der Regel von der Newtonschen Gravitation ausgegangen wird. Tatsächlich bedeutet aber ein Abweichungsfaktor größer 1 einen DM-Effekt, der selbst dann, wenn er klein erscheint, in der Summe eine große Menge verborgene Materie suggerieren kann. Es besteht daher die Aufgabe entsprechende Computersimulationen durchzuführen, was allerdings nicht Gegenstand dieser Arbeit ist.

Drittens ist es wichtig zu verstehen, dass die Winkelgeschwindigkeit in der Eigenzeit des umlaufenden Objektes gemessen ist. Es ist aber zu berücksichtigen,

dass aus der Sicht der inneren Galaxie die Zeit mit Uhren gemessen wird, die langsamer laufen. Dieser Effekt muss zusätzlich berücksichtigt werden. Die Nichtberücksichtigung bewirkt einen zusätzlichen DM-Effekt. Betrachten wir jetzt die Unterschiede an einem numerisch gerechneten Beispiel, um ein Gefühl für die Gemeinsamkeiten und Unterschiede zu bekommen. In der linken Abbildung ist die Abweichungsfunktion für alle drei Theorien dargestellt, wobei der Newtonsche Wert mit der Lage der r-Achse zusammenfällt. Der Rechnung lagen die folgenden Werte zugrunde: $M=1$ und $c=1$. Es ist bemerkenswert, dass der DM-Effekt, wenn man die Abweichung vom Wert 1 so nennen möchte, in der ART sogar höher ist, als in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik. Ein besonderer DM-Effekt, der über die Folgen der Berücksichtigung der ART hinausgeht, existiert folglich in der singularitätsfreien allgemein-relativistischen Gravitationstheorie nicht. Mit Ausnahme der Singularitäten verhält sich die singularitätsfreie allgemein-relativistische Gravitationstheorie gegenüber der Einstein'schen Allgemeinen Relativitätstheorie sehr ähnlich.



Allgemeine Diskussion

Über die Rolle der Quantenbeziehung und des Newtonschen Potentials in Bezug auf die relativistische Gravitation

Die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik beruht auf dem mathematischen Experiment, die äußere Schwarzschild-Metrik in der Weise geringfügig zu modifizieren, dass diese neue Metrik im Planetensystem volle empirische Evidenz beanspruchen kann, zugleich aber kein fundamentales Singularitätsproblem enthält, mit dem Ziel, die physikalischen Implikationen zu untersuchen.

Da die Schwarzschild-Metrik eine exakte und eindeutige Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen ist, muss die Modifikation unter der Voraussetzung, dass es sich um eine Vakuumlösung handeln soll, Prinzipien der Allgemeinen Relativitätstheorie verletzen. Sie repräsentiert dann kein Einstein-Vakuum, welches durch $R_{mm} = 0$ definiert ist. Darüber wurde bereits geschrieben.

Das Bemerkenswerte ist es nun, dass das zunächst mathematisch inspirierte Konstrukt einer Metrik sich exakt aus einer quantenphysikalischen Bedingung im Zusammenhang mit einer Verbindung zum Newtonschen Gravitationsgesetz ergibt. Dabei scheint es kein Zufall zu sein, dass der Ort $r = 0$ in der neuen Metrik die geometrische Rolle übernimmt, welche die Oberfläche der Kugel mit dem Radius $r = 2M$ (Schwarzschild-Radius) hat. Jedes andere Konstrukt hätte nicht diese Eigenschaft. Es verschwinden daher alle negativen Eigenschaften der Gravitation, wie sie durch das Singularitätsproblem zum Ausdruck kommen, bei gleichzeitiger Erhaltung der hohen empirischen Evidenz der Allgemeinen Relativitätstheorie. Das spricht für eine Unternehmung, die Einstein'sche Gravitationstheorie einer entsprechenden Modifikation oder (vielleicht) modifizierten Deutung zu unterziehen. Letzteres betrifft vor allem die Frage, was überhaupt unter Vakuum zu verstehen ist, denn spätestens seit Dirac, Hawking und Unruh ist es offensichtlich, dass der Raum (die Raum-Zeit) mehr Qualitäten zu repräsentieren scheint, als es den Vorstellungen der klassischen Physik entspricht²⁸. Nach der klassischen Physik ist das Vakuum der leere Raum und nach Einstein bedeutete Leere das Verschwinden des Einstein-Tensors G_{mm} . Es macht also Sinn, die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik auf ihre gravitationsphysikalischen Implikationen zu untersuchen. Ein erster Versuch, zum Ordnen der Gedanken, sei hier in Thesen formuliert.

1. Zunächst liegt eine modifizierte Gravitation als metrisches und statisches Zentralfeld vor, welches in Kugelkoordinaten formuliert ist. Dadurch sind Beziehungen zur Newtonschen Gravitation und Beziehungen der Tensorkomponenten untereinander zunächst nur in einer spezifischen Darstellungsform vorhanden. Aus ihnen gilt es nach Möglichkeit, das allgemeine Gesetz zu extrahieren oder zu errahnen, wie die Beziehung zwischen Materie und Gravitation auf neue Weise determiniert wird – im Vergleich zur ART.
2. In der vorliegenden Form der Metrik ist die Beziehung der entscheidenden Tensorkomponenten des metrischen Tensors durch $g_{11} \cdot g_{44} = -1$ bestimmt. Dadurch werden die Einflüsse der Quantenbeziehung $E = h \cdot \nu$ und des Newtonschen Gravitationspotentials $U = -M \cdot c^2 \cdot r^{-1}$

²⁸ Wir denken hier an Diracs Deutung der Antimaterie als Löcher im Vakuum, an den Hawking-Effekt bei Schwarzen Löchern, sowie an dessen Pendant, den Unruh-Effekt. Seltsamkeiten die immer dann auftreten, wenn die Quantenphysik mit der 4-dimensionalen Raum-Zeit kombiniert wird.



automatisch für die räumlichen und für die zeitlichen Elemente der Metrik erfasst und die Bedingung einer 4-dimensionalen Beschreibung der Gravitation als Eigenschaft der Raum-Zeit im Sinne einer Riemannschen Geometrie befriedigt. Das Newtonsche Gravitationsgesetz wird so aus seiner Einbindung in das klassische Konzept eines absoluten Raumes und einer absoluten Zeit herausgelöst und relativistisch aufbewahrt. In diesem Sinne kommt dem Newtonschen Gravitationsgesetz eine über die klassische Physik hinausgehende allgemeine und eigenständige Bedeutung zu. Die extreme Ähnlichkeit der neuen Metrik mit der Schwarzschild-Metrik unterstreicht eine solche Möglichkeit.

3. Aufgrund von Punkt 2 dieser Liste gelingt die allgemein-relativistische Bezugnahme auf das Newtonsche Gravitationspotential durch die Setzung:

$$hdv = -\gamma \frac{h \cdot v}{c^2} \frac{M_0}{r^2} dr \quad (439).$$

Formt man diese Beziehung unter Berücksichtigung der Abkürzung $M = \gamma \cdot c^{-2} \cdot M_0$ um:

$$h \cdot v \cdot r^2 \frac{dv}{dr} = -h \cdot M \quad (440),$$

$$v \cdot r^2 \frac{dv}{dr} = -M$$

dann erscheinen die rechten Seiten als Invarianten des Feldes. Damit ist aber auch die linke Seite eine invariante Größe. Diese Beziehung ist von zentraler Bedeutung dafür, wie die Beziehung zwischen Materie und Geometrie erfasst werden muss, denn in diesem Zusammenhang ist die Abweichung von der Allgemeinen Relativitätstheorie (leider nur als Spezialfall) kodiert.

4. Die Einstein'schen-Feldgleichungen

$$R_{nm} + \frac{1}{2} g_{nm} R = \mathfrak{S} T_{nm} \quad (441)$$

sind das allgemein-relativistische Analogon zur Poisson-Gleichung

$$\Delta U = 4 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot \rho \quad (442).$$

Für das klassische kugelsymmetrische Newtonsche Gravitationspotential $U = -Mc^2 \cdot r^{-1}$ folgt für das Vakuum:

$$\Delta U = 0 \quad (443),$$

das relativistische Analogon hierzu ist:

$$R_{nm} + \frac{1}{2} g_{nm} R = 0 \quad (444).$$

Für die äußere Schwarzschild-Lösung, und weil im Einstein-Vakuum der Krümmungsskalar R verschwindet, gilt

$$R_{nm} = 0 \quad (445),$$

wie bereits gesagt, doch zieht man die quasi-klassische Näherung zur Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik:

$$U = -\frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2} e^{-\frac{2M}{r}} \quad (446)$$

heran, um ΔU zu bilden, dann folgt:

$$\Delta U = 8 \cdot c^2 \frac{M^2}{r^4} e^{-\frac{2M}{r}} > 0 \quad (447),$$



und wegen der Proportionalität $M \propto c^{-2}$, folgt $\Delta U = 0$ erst für $c \rightarrow \infty$, falls $M_0 > 0$.

Dementsprechend ist sowohl R_{mn} zu bestimmen, als auch den Einstein-Tensor für die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik zu untersuchen, von Bedeutung - dieses ist auf Grund des Umfangs der Rechnungen erst Gegenstand einer künftigen Untersuchung.

- Die Selbstregulation der Schwerkraft stellt sich im quasi-klassischen Grenzfall als ein antigravitativer Effekt in der Weise dar, dass die Antigravitation durch das quasi-klassische Gravitationspotential (446) induziert wird. Bildet man nämlich den Gradienten des Potentials (446) und formt geschickt um, dann folgt für die Feldstärke:

$$\begin{aligned} \vec{G}(\vec{r}) &= -grad(U) = -\frac{Mc^2}{r^3} e^{-\frac{2M}{r}} \vec{r} = \\ &= -\frac{2M}{r^3} \left(-\frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2} e^{-\frac{2M}{r}} + \frac{c^2}{2} \right) \cdot \vec{r} = \\ &= +\frac{2M}{r^3} |U| \cdot \vec{r} - \frac{Mc^2}{r^3} \vec{r} \end{aligned} \quad (448).$$

Die Beziehung (448) zeigt deutlich die Newtonsche Gravitationsfeldstärke im 2. Term, der erste Term schwächt offensichtlich diese Feldstärke ab, d.h., er wirkt antigravitativ. Dieser antigravitative Effekt verhindert für $r \rightarrow 0$ ein Unendlichwerden der Feldstärke.

Über die Hypothese, das Licht als Uhr für die Messung der lokalen Zeit zu betrachten

Es war ein unvorhergesehenes Ergebnis der Untersuchung, dass die Frequenzveränderung des Lichtes im Gravitationsfeld, wenn man das Licht im Newtonschen Sinn an die Newtonsche Gravitation koppelt, eine gravitationsabhängige Frequenzänderung zeigt, die in Zusammenhang mit der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik gebracht werden kann, indem die Änderung der Frequenz nicht im klassischen Sinne als Energieverlust durch Arbeit gegen das Gravitationsfeld, sondern als Ausdruck eines veränderten lokalen Uhrengangs interpretiert wird. Das ist die physikalische Hypothese, welche der Herleitung der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik zugrunde liegt. Die Einführung dieser Metrik gemäß dieser Herleitung stellt darum eine Umdeutung der klassischen Rechnung dar. Es ist bemerkenswert, dass genau auf Grund dieser Umdeutung das Singularitätsproblem verschwindet. Die Einbeziehung der Quantenbeziehung $E = h \cdot \nu$ führt daher nicht auf eine Quantentheorie der Gravitation, sie definiert nur, was als Uhr zu verstehen ist, welche die lokale Zeit misst. Eine Quantentheorie der Gravitation erfordert dagegen die Einführung von Operatoren, welche die gravitativen Größen repräsentieren und damit zugleich auch die Einführung von Wellen- und Operatorgleichungen sowie Erwartungswerten für die Metrik. Das ist bei der singularitätsfreien allgemein-relativistischen Gravitationstheorie, bzw. bei der Post-Einstein-Schwarzschild-Lösung, nicht der Fall. In dem Sinne liegt hier nach wie vor eine nicht-quantenphysikalische Feldtheorie ähnlich der ART vor.

Einstein- und Post-Einstein-Effekte im Zentralfeld
Klaus Retzlaff





Anhang A

Integration des elliptischen Integrals (117):

Setzen wir zunächst:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{D}{m_0} \right)^2 \\ B &= 2\gamma M_0 \\ C &= \frac{2E}{m_0} \\ \varphi &= \sqrt{A} \cdot I + \varphi_0 \end{aligned} \tag{A1}$$

dann haben wir:

$$I(r) = \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{C + \frac{B}{r} - \frac{A}{r^2}}} \tag{A2}$$

zu integrieren. Auf Grund von (A1) gilt $A > 0$. Wir setzen $r > 0$ voraus, und weiter muss

$$C + \frac{B}{r} - \frac{A}{r^2} > 0 \tag{A3}$$

gelten. Aus (A3) leiten wir die Bedingung:

$$r^2 + \frac{B}{C}r - \frac{A}{C} > 0 \tag{A4}$$

ab, und dass setzt

$$-\frac{B}{2C} - \sqrt{\left(\frac{B}{2C}\right)^2 + \frac{A}{C}} < r < -\frac{B}{2C} + \sqrt{\left(\frac{B}{2C}\right)^2 + \frac{A}{C}} \tag{A5},$$

sowie

$$\left(\frac{B}{2C}\right)^2 + \frac{A}{C} > 0 \tag{A6}$$

voraus. Da wir den Fall der finiten Bewegung voraussetzen, gilt wegen $E < 0$ und der Festlegung (A1):

$C < 0$. Die Beziehung (A5) wird genau dadurch erfüllt, weil wir die Bewegung $r_{\text{Perihel}} \leq r \leq r_{\text{Aphel}}$ gemäß (132) und (133) betrachten, und aus dem gleichen Grund ist auch (A6) automatisch gesichert.

Um das Integral (A2) integrieren zu können, substituieren wir weiter, wie folgt:



$$r = \frac{1}{u}$$

$$\frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2} \quad (\text{A7}).$$

$$dr = -\frac{1}{u^2} du$$

Nach Einsetzen von (A6) nimmt das Integral (A2) die Form:

$$I(u) = -\int \frac{du}{\sqrt{C + Bu - Au^2}} \quad (\text{A8})$$

an. Nun überführen wir das Polynom 2. Grades:

$$Y = C + Bu - Au^2 \quad (\text{A9})$$

in der Wurzel auf die Scheitelpunktsform

$$Y = -A(u - u_{\text{Scheitel}})^2 + Y_{\text{Scheitel}} \quad (\text{A10}),$$

d.h. wir bestimmen zunächst den Scheitelpunkt:

$$0 = Au^2 - Bu - C$$

$$0 = u^2 - \frac{B}{A}u - \frac{C}{A} \quad (\text{A11})$$

$$u_{\text{Scheitel}} = +\frac{B}{2A}$$

und

$$Y_{\text{Scheitel}} = C + \frac{B^2}{2A} - \frac{B^2}{4A} = C + \frac{B^2}{4A} \quad (\text{A12}).$$

Das Integral (A8) erhält damit die Form:

$$I(u) = -\int \frac{du}{\sqrt{Y_{\text{Scheitel}} - A(u - u_{\text{Scheitel}})^2}} \quad (\text{A13}).$$

Wir substituieren jetzt weiter:

$$x = \sqrt{A}(u - u_{\text{Scheitel}})$$

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{A} \quad (\text{A14}).$$

$$du = \frac{dx}{\sqrt{A}}$$



Mit (A14) geht das Integral (A13) über in die Form:

$$I(x) = -\frac{1}{\sqrt{A}} \int \frac{dx}{\sqrt{y_{\text{Scheitel}} - x^2}} \quad (\text{A15}).$$

An (A15) sieht man sehr schön, warum die Bedingung $A > 0$ erforderlich war. Auch die Scheitelpunktsform macht einen physikalischen Sinn, der mit unseren Voraussetzungen der finiten Bewegung in Zusammenhang steht.

Laut Integraltafel (**MFB** = Mathematische Formeln, BARTSCH, VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1976, Seite 319, Integral Nummer 4) gilt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{A16}).$$

Die Sinus-Funktion ist über eine Winkelverschiebung $\sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ mit der Cosinus-Funktion verbunden und daraus folgt unmittelbar:

$$\arcsin(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \arccos(\alpha) \quad (\text{A17}).$$

Mit $\alpha = \frac{x}{a}$ und (A17) ergibt sich für (A16) die Beziehung:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{x}{a}\right) \quad (\text{A18}).$$

$$\arccos\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\pi}{2} - \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

Nun können wir die Verbindung zu (A15) herstellen, mit

$$a^2 = Y_{\text{Scheitel}}$$

$$I(x)\sqrt{A} = -\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (\text{A19})$$

folgt:

$$\arccos\left(\frac{x}{\sqrt{Y_{\text{Scheitel}}}}\right) = \frac{\pi}{2} + \sqrt{A} \cdot I(x) \quad (\text{A20}),$$

und damit endgültig die Beziehung zum Arcus-Cosinus:



$$\sqrt{A} \cdot I(x) = -\int \frac{dx}{\sqrt{Y_{\text{Scheitel}} - x^2}} = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{Y_{\text{Scheitel}}}}\right) - \frac{\pi}{2} \quad (\text{A21}).$$

Nun beginnen wir mit den Rücksubstitutionen. Wir ersetzen Y_{Scheitel} unter Verwendung von (A12):

$$\sqrt{A} \cdot I(x) = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{C + \frac{B^2}{4A}}}\right) - \frac{\pi}{2} \quad (\text{A22}),$$

wir ersetzen A , B und C mittels (A1), mit Ausnahme des Vorfaktors \sqrt{A} :

$$\sqrt{A} \cdot I(x) = \arccos\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{2E}{m_0} + \frac{\gamma^2 m_0^2 M_0^2}{D^2}}}\right) - \frac{\pi}{2} \quad (\text{A23}),$$

wir ersetzen x mittels (A14):

$$\sqrt{A} \cdot I(u) = \arccos\left(\frac{\frac{D}{m_0} \left(u - \frac{1}{2} \frac{2\gamma m_0^2 M_0}{D^2}\right)}{\sqrt{\frac{2E}{m_0} + \frac{\gamma^2 m_0^2 M_0^2}{D^2}}}\right) - \frac{\pi}{2} \quad (\text{A23}).$$

Ziehen wir m_0 in die Wurzel, so folgt:

$$\sqrt{A} \cdot I(u) = \arccos\left(\frac{D \left(u - \frac{1}{2} \frac{2\gamma m_0^2 M_0}{D^2}\right)}{\sqrt{2m_0 E + \frac{\gamma^2 m_0^4 M_0^2}{D^2}}}\right) - \frac{\pi}{2} \quad (\text{A24}),$$

und ersetzen wir u mittels (A7), dann folgt:

$$\sqrt{A} \cdot I(r) = \arccos\left(\frac{D \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2} \frac{2\gamma m_0^2 M_0}{D^2}\right)}{\sqrt{2m_0 E + \frac{\gamma^2 m_0^4 M_0^2}{D^2}}}\right) - \frac{\pi}{2} \quad (\text{A25}).$$

Wenn wir jetzt noch die Klammer im Argument des Arcus-Cosinus auflösen, dann erhalten wir das Resultat:



$$\sqrt{A} \cdot I(r) = \arccos \left(\frac{\frac{D - \gamma m_0^2 M_0}{r} \frac{D}{D}}{\sqrt{2m_0 E + \frac{\gamma^2 m_0^4 M_0^2}{D^2}}} \right) - \frac{\pi}{2} \quad (\text{A26}).$$

Kommen wir nun zurück auf (A1), dann folgt für den Winkel $\varphi(r)$:

$$\varphi(r) = \arccos \left(\frac{\frac{D - \gamma m_0^2 M_0}{r} \frac{D}{D}}{\sqrt{2m_0 E + \frac{\gamma^2 m_0^4 M_0^2}{D^2}}} \right) + \varphi_0 \quad (\text{A27}),$$

weil φ_0 eine Integrationskonstante ist, kann diese den Term $-\frac{\pi}{2}$ absorbieren. Wie wir durch Vergleich feststellen können, entspricht die Formel (A27) exakt der Gleichung (141).





Anhang B

Wir gehen von der Beziehung:

$$A^2 - c^2 + \frac{2Mc^2}{r} - \frac{B^2}{r^2} + \frac{2MB^2}{r^3} = 0 \quad (\text{B1})$$

aus. Wegen der Bedingung für eine finite Bewegung muss $A^2 - c^2 < 0$ gelten. Wir substituieren wie folgt:

$$\begin{aligned} X_3 &= |A^2 - c^2| \\ X_2 &= +2Mc^2 \\ X_1 &= B^2 \\ X_0 &= 2MB^2 \end{aligned} \quad (\text{B2}),$$

und implementieren die Bedingung für die finite Bewegung dadurch, dass wir den Term X_3 mit einem negativen Vorzeichen versehen. Dann führen die Beziehungen (B1) und (B2) zusammen auf die Gleichung:

$$-X_3 r^3 + X_2 r^2 - X_1 r + X_0 = 0 \quad (\text{B3}).$$

Wir müssen nun durch $-X_3$ dividieren, um eine auswertbare Form zu erhalten, das ergibt:

$$r^3 - \frac{X_2}{X_3} r^2 + \frac{X_1}{X_3} r - \frac{X_0}{X_3} = 0 \quad (\text{B4}).$$

Auf Grund der Definition (B2) haben die Vorzeichen in (B4) eine explizite Bedeutung. Wir substituieren nun weiter:

$$\begin{aligned} a &= \frac{X_2}{X_3} > 0 \\ b &= \frac{X_1}{X_3} > 0 \\ c &= \frac{X_0}{X_3} > 0 \end{aligned} \quad (\text{B5}),$$

wobei das c in (B5) nichts mit der Lichtgeschwindigkeit zu tun hat, es ist nur eine Hilfsvariable. Die Gleichung (B4) bekommt mit (B5) die Form:

$$r^3 - ar^2 + br - c = 0 \quad (\text{B6}).$$

Allein auf Grund des negativen Vorzeichens vor dem letzten Term, d.h., wegen $-c$, gibt es in der Tat auch 3 reelle Lösungen, ganz in Übereinstimmung mit der Abbildung 2. Um diese Lösungen bestimmen zu können, müssen wir eine weitere Substitution vornehmen:



$$r = y + \frac{a}{3} \quad (\text{B7}).$$

Nach Einsetzen und fleißigem Rechnen erhält man die reduzierte Form:

$$y^3 + py + q = 0 \quad (\text{B8}),$$

mit

$$p = -\frac{1}{3}a^2 + b \quad (\text{B9}).$$

$$q = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{b}{3}a - c$$

Wir führen nun die Rücksubstitution durch:

$$a = \frac{X_2}{X_3} = \frac{2Mc^2}{|A^2 - c^2|}$$

$$b = \frac{X_1}{X_3} = \frac{B^2}{|A^2 - c^2|} \quad (\text{B10}).$$

$$c = \frac{X_0}{X_3} = \frac{2MB^2}{|A^2 - c^2|}$$

Es ist in (B10) zu beachten, dass das linksseitige c nur die Hilfsvariable ist, während das rechtsseitige c^2 das physikalisch bedeutsame Quadrat der Vakuumlichtgeschwindigkeit ist. Setzen wir (B10) in die Beziehungen (B9) ein, dann folgen:

$$p = -\frac{4M^2c^4}{|A^2 - c^2|^2} + \frac{B^2}{|A^2 - c^2|} \quad (\text{B11}).$$

$$q = -\frac{16}{27} \frac{M^3c^6}{|A^2 - c^2|^3} + \frac{2}{3} \frac{Mc^2B^2}{|A^2 - c^2|^2} - \frac{2MB^2}{|A^2 - c^2|}$$

Mit (B11) ergeben sich die 3 Lösungen:

$$y_1 = 2\sqrt{\frac{|p|}{3}} \cos\left(\frac{\phi}{3}\right)$$

$$y_2 = -2\sqrt{\frac{|p|}{3}} \cos\left(\frac{\phi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) \quad (\text{B12}),$$

$$y_3 = -2\sqrt{\frac{|p|}{3}} \cos\left(\frac{\phi}{3} + \frac{\pi}{3}\right)$$

mit dem Winkel:



$$\phi = \arccos \left(\frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\left(\frac{|p|}{3}\right)^3}} \right) \quad (\text{B13}).$$

Wir ersparen es uns und dem Leser, die Formeln weiter ineinander einzusetzen.

Für die praktische Berechnung mit konkreten Werten des Planetensystems werden in (B10) die folgenden z.T. nur näherungsweise gültigen Substitutionen vorgenommen:

$$\begin{aligned} |A^2 - c^2| &= \frac{2|E|}{m_0} \\ M &= \frac{\gamma M_0}{c^2} \\ B &= \frac{D}{m_0} \end{aligned} \quad (\text{B14}).$$

Die Hilfsvariablen aus (B10) werden mit (B14) direkt bestimmt, es ergeben sich:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\gamma m_0 M_0}{|E|} \\ b &= \frac{D^2}{2m_0 |E|} \\ c &= \frac{\gamma M_0 D^2}{c^2 m_0 |E|} \end{aligned} \quad (\text{B15}).$$

Wieder ist darauf zu achten, dass das linksseitige c nur die Hilfsvariable, das rechtsseitige c^2 das Quadrat der Vakuumlichtgeschwindigkeit sind. Nun werden für die konkreten Berechnungen (Anhang C), nicht die Beziehungen (B11) benutzt, sondern (B9).





Anhang C²⁹

Im diesen Anhang ist die Dokumentation konkreter Berechnungen zu finden. Wir beginnen die Darstellung mit Parametern für die Sonnen und den Planeten Merkur. Grundlage der Berechnungen ist die folgende Datenbasis:

Masse Merkur [kg]:= 3.30100000000000E+0023	(DLR, 2017) ³⁰
Masse Sonne [kg]:= 1.98840000000000E+0030	(DLR, 2017)
Radius der Sonne (Äquator) [m] := 6.96342000000000E+0008	(NASA, 2017)
Gamma [m ³ kg ⁻¹ s ⁻²]:= 6.67700000000000E-0011	(AGM,2017) ³¹
Perihel [m]:= 4.60000000000000E+0010	(DLR, 2017)
Aphel [m]:= 6.98200000000000E+0010	(DLR, 2017)
Exzentrizität [1]:= 2.05639340000000E-0001	(DLR, 2017)
Vakuumlichtgeschwindigkeit [m/s]:= 2.99792458000000E+0008	(CODATA2014)
siderische Umlaufzeit Merkur [s]:= 7.60052160000000E+0006	
siderisches Erdenjahr [s]:= 3.15581495400000E+0007	

Berechnung des **Bahnparameters p der Ellipse des Merkur**, gem. umgestellter Gleichung (145) für die Werte $\varphi = \varphi_0 = 0$. In diesem Fall folgt:

$$p = (1 + e) \cdot r_{\text{Perihel}} \quad (\text{C1})$$

Bahnparameter des Merkur [m] p:= 5.54594096400000E+0010

Berechnung des Betrages des **Drehimpulses des Planeten Merkur**, gem. umgestellter Gleichung (144):

$$D = \sqrt{\gamma p m_0^2 M_0} \quad (\text{C2})$$

Drehimpuls des Merkur [kg m² s⁻¹] D:= 8.95727093643662E+0038

Berechnung der **Gesamtenergie des Planeten Merkur**, gem. umgestellter Gleichung (144):

$$E = \frac{(e^2 - 1)\gamma^2 m_0^3 M_0^2}{2D^2} \quad (\text{C3})$$

dabei ist e die Exzentrizität des Planeten Merkur.

Gesamtenergie des Merkur [kg m² s⁻²] E:=-3.78408214627782E+0032

Berechnung des **Verhältnisses** $\frac{2|E|}{m_0}$ **für den Planeten Merkur**

²⁹ Die Daten sind die original einkopierten Computerausdrucke.

³⁰ Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR)

³¹ Astronomische Gesellschaft Magdeburg e.V. (AGM), Artikel: „Ungenauigkeit der Gravitationskonstante ...“, K. Retzlaff, 2012, die hier verwendete Gravitationskonstante ist ein Mittelwert aus den im Artikel zitierten Messungen.



$$2E/m_0 \text{ des Merkur } [m^2 s^{-2}] \quad \frac{2|E|}{m_0} := 2.29268836490628E+0009$$

$$\text{Schwarzschild-Radius der Sonne [m]:} \quad r_s = 2.95443010824370E+0003$$

$$\text{gem. Gleichung } r_s = \frac{2\gamma M_0}{c^2} \quad (C4)$$

Berechnung des **Merkurperihels in Schwarzschild-Radien der Sonne**

$$\text{Merkurperihel [2M-Sonne]} \quad r_{\text{Perihel}}/r_s := 1.55698386201951E+0007 \quad (C5)$$

Berechnungen zur Schwarzschild - Metrik: r1, r2, r3 gemäß Formel (194) unter der Voraussetzung (195)

$$\begin{aligned} r_1 \text{ in [m]} &:= 6.98164158492763E+0010 \text{ ist das } \mathbf{Aphel} \text{ des Merkur.} \\ r_2 \text{ in [m]} &:= 2.95443042302132E+0003 \text{ in der Nähe des } \mathbf{Schwarzschild-Radius} \text{ der Sonne.} \\ r_3 \text{ in [m]} &:= 4.59999913392629E+0010 \text{ ist das } \mathbf{Perihel} \text{ des Merkur.} \end{aligned} \quad (C6)$$

Exakte Berechnung von A^2 , B^2 , sowie $A^2 - c^2$ **gemäß der Schwarzschild-Metrik**, auf Basis der gemessenen Daten für Aphel und Perihel für den Planeten Merkur

$$\begin{aligned} B^2 [m^4/s^2] &:= 7.36324544014699E+0030 \\ A^2 [m^2/s^2] &:= 8.98755155810645E+0016 \\ A^2 - c^2 [m^2/s^2] &:= -2.29261724422656E+0009 \end{aligned} \quad (C7)$$

Exakte Berechnung, Lösung der kubischen Gleichung (B1) gemäß (B10), (B11), (B12).

$$\begin{aligned} r_1 \text{ exakt [m]} &:= 6.9819999998909E+0010 \\ r_2 \text{ exakt [m]} &:= 2.95443042301759E+0003 \\ r_3 \text{ exakt [m]} &:= 4.6000000002406E+0010 \\ r_{in} - r_s \text{ (exakt) in [m]} &:= 3.14777618843687E-0004 \end{aligned} \quad (C8)$$

Berechnung (ART) der Perihel-Drehung des Planeten Merkur nach der Einstein-Formel (D64)

$$\delta \text{ in ['' pro siderisches Jahrhundert]} := 4.29981142988089E+0001 \quad (C9)$$

Berechnung (ART) der Perihel-Drehung des Planeten Merkur nach Formel (D33), Ordnung bis k^2

$$\delta \text{ in ['' pro siderisches Jahrhundert]} := 4.29989261891079E+0001 \quad (C10)$$

Berechnung (ART) der Perihel-Drehung des Planeten Merkur nach Formel (D34), Ordnung bis k^4

$$\delta \text{ in ['' pro siderisches Jahrhundert]} := 4.29989262254326E+0001 \quad (C11)$$

Berechnung (PES) der Perihel-Drehung des Planeten Merkur nach Formel (268) Ordnung bis k^4

$$\delta \text{ in ['' pro siderisches Jahrhundert]} := 4.29888715092064E+0001 \quad (C12)$$



Anhang D

Wir führen hier die schrittweise Berechnung der Einstein'schen Periheldrehung für den Planeten Merkur vor. Ausgangspunkt der Berechnung ist die Bewegungsgleichung (214), die wir hier mit (D1) bezeichnen:

$$\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\text{Perihel}}}^{r_{\text{Aphel}}} \frac{\frac{B}{r^2} dr}{\sqrt{A^2 - c^2 + \frac{2Mc^2}{r} - \frac{B^2}{r^2} + \frac{2MB^2}{r^3}}} \quad (\text{D1}).$$

Im ersten Schritt substituieren und definieren wir:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{r} \\ u_A &= \frac{1}{r_{\text{Aphel}}} \\ u_P &= \frac{1}{r_{\text{Perihel}}} \\ u_i &= \frac{1}{r_{\text{in}}} \end{aligned} \quad (\text{D2}).$$

Dabei gelten die Relationen:

$$u_A < u_P \ll u_i \approx \frac{1}{2M} \quad (\text{D3}).$$

Um dr zu substituieren bilden wir die Ableitung:

$$\frac{du}{dr} = -r^{-2} \quad (\text{D4}),$$

und daraus folgt:

$$dr = -r^2 du \quad (\text{D5}).$$

Mit (D2), (D3) und (D5) folgt für (D1):

$$\Delta\varphi = 2 \int_{u_P}^{u_A} \frac{-B du}{\sqrt{A^2 - c^2 + 2Mc^2 u - B^2 u^2 + 2MB^2 u^3}} \quad (\text{D6}).$$

Wir klammern nun $2MB^2$ aus und ziehen das als konstanten Faktor vor das Integral, zugleich tauschen wir die Integrationsgrenzen, und werden dadurch den negativen Faktor im Zähler los, so finden wir:

$$\Delta\varphi = \frac{2}{\sqrt{2M}} \int_{u_A}^{u_P} \frac{du}{\sqrt{A^2 - c^2 + \frac{c^2}{2MB^2} u - \frac{1}{2M} u^2 + u^3}} \quad (\text{D7}).$$



Wir verkürzen jetzt die Schreibweise durch die folgenden Festlegungen:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{A^2 - c^2}{2MB^2} \\ X_1 &= \frac{c^2}{B^2} \\ X_2 &= -\frac{1}{2M} \end{aligned} \quad (D8).$$

Die Abkürzungen gemäß (D8) bewirken für (D7) die neue Form:

$$\Delta\varphi = \frac{2}{\sqrt{2M}} \int_{u_A}^{u_P} \frac{du}{\sqrt{X_0 + X_1u + X_2u^2 + u^3}} \quad (D9).$$

Wir wissen, dass wir für den Merkur 3 reelle Wurzeln des Polynoms haben. Jedes Polynom kann als Produkt von Binomialfaktoren dargestellt werden, welche die Wurzeln enthalten. Diese Eigenschaft nutzen wir aus und schreiben:

$$\Delta\varphi = \frac{2}{\sqrt{2M}} \int_{u_A}^{u_P} \frac{du}{\sqrt{(u - u_A)(u - u_P)(u - u_i)}} \quad (D10),$$

und es gelten die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned} X_0 &= -u_A u_P u_i \\ X_1 &= u_A u_P + u_A u_i + u_P u_i \\ X_2 &= -u_A - u_P - u_i \end{aligned} \quad (D11).$$

Vergleichen wir (D11) mit (D8), dann sehen wir die folgenden Zusammenhänge:

$$\begin{aligned} \frac{|A^2 - c^2|}{2MB^2} &= u_A u_P u_i \\ \frac{c^2}{B^2} &= u_A u_P + u_A u_i + u_P u_i \\ \frac{1}{2M} &= u_A + u_P + u_i \end{aligned} \quad (D12).$$

Auch der Beziehung (D12) ist anzusehen, dass keine der Lösungen der kubischen Gleichung identisch mit dem Schwarzschild-Radius sein kann. Zugleich ist zu erkennen, dass je weiter Aphel und Perihel vom Schwarzschild-Radius entfernt sind, umso näher muss u_i an $\frac{1}{2M}$ heranrücken. Nun weiter mit der Vorbereitung der Integration. Die Form des Integrals (D9) provoziert uns zu einer weiteren Substitution:

$$y = \sqrt{\frac{u - u_A}{u_P - u_A}} \quad (D13).$$



Durch Einsetzen der Integrationsgrenzen für u in (D13) folgen die Integrationsgrenzen für y zu:

$$\begin{aligned} u_A &\rightarrow \sqrt{\frac{u_A - u_A}{u_P - u_A}} = 0 \\ u_P &\rightarrow \sqrt{\frac{u_P - u_A}{u_P - u_A}} = 1 \end{aligned} \quad (\text{D14}).$$

Wir bilden nun noch die benötigte Ableitung, um das Differential „ du “ zu ersetzen:

$$\frac{dy}{du} = \frac{1}{2(u_P - u_A) \sqrt{\frac{u - u_A}{u_P - u_A}}} \quad (\text{D15}),$$

und damit finden wir:

$$du = 2(u_P - u_A) \sqrt{\frac{u - u_A}{u_P - u_A}} dy \quad (\text{D16}).$$

Durch Einsetzen von D(14) und (D16) in (D10) folgt weiter:

$$\Delta\phi = \frac{4(u_P - u_A)}{\sqrt{2M} \sqrt{u_P - u_A}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(u(y) - u_P) \cdot (u(y) - u_i)}} \quad (\text{D17}).$$

Um die Substitution zu vollenden, müssen wir $u(y)$ bestimmen, indem wir die Beziehung (D13) nach u umformen, das ergibt:

$$u(y) = y^2(u_P - u_A) + u_A \quad (\text{D18}).$$

Setzen wir (D18) und (D17) ein, gewinnen wir das Integral mit z.T. didaktisch motivierten Klammern:

$$\Delta\phi = \frac{4(u_P - u_A)}{\sqrt{2M} \sqrt{u_P - u_A}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{[y^2(u_P - u_A) + (u_A - u_P)] \cdot [y^2(u_P - u_A) + (u_A + u_i)]}} \quad (\text{D19}).$$

Wir formen weiter um, indem wir $(u_A - u_i)$ leicht ausklammern:

$$\Delta\phi = \frac{4(u_P - u_A)}{\sqrt{2M} \sqrt{u_P - u_A}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{[y^2(u_P - u_A) + (u_A - u_P)] \cdot \left[(u_A - u_i) \cdot \left(y^2 \frac{u_P - u_A}{u_A - u_i} + 1 \right) \right]}} \quad (\text{D20}).$$

Jetzt kommt etwas Vorzeichenarbeit dazu, wobei wir an die Relationen gemäß (D3) denken müssen, denn diese haben etwas mit den Vorzeichen einiger Klammern zu tun. Zuerst ersetzen wir $(u_A - u_i)$ durch den Ausdruck $-(u_i - u_A)$, es folgt dann:



$$\Delta\varphi = \frac{4(u_P - u_A)}{\sqrt{2M} \sqrt{u_P - u_A}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{\left[y^2(u_P - u_A) + (u_A - u_P) \right] \cdot \left[-(u_i - u_A) \cdot \left(y^2 \frac{u_P - u_A}{u_A - u_i} + 1 \right) \right]}} \quad (\text{D21}).$$

Jetzt ziehen wir das negative Vorzeichen in die linke Klammer:

$$\Delta\varphi = \frac{4(u_P - u_A)}{\sqrt{2M} \sqrt{u_P - u_A}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{\left[-y^2(u_P - u_A) - (u_A - u_P) \right] \cdot \left[(u_i - u_A) \cdot \left(y^2 \frac{u_P - u_A}{u_A - u_i} + 1 \right) \right]}} \quad (\text{D22}).$$

Nun ersetzen wir $-(u_A - u_P)$ durch $(u_P - u_A)$, es folgt:

$$\Delta\varphi = \frac{4(u_P - u_A)}{\sqrt{2M} \sqrt{u_P - u_A}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{\left[(u_P - u_A) - y^2(u_P - u_A) \right] \cdot \left[(u_i - u_A) \cdot \left(y^2 \frac{u_P - u_A}{u_A - u_i} + 1 \right) \right]}} \quad (\text{D23}).$$

Schließlich können wir den entsprechenden Faktor ausklammern und aus dem Integral herausziehen:

$$\Delta\varphi = \frac{4(u_P - u_A)}{\sqrt{2M} \sqrt{u_P - u_A} \sqrt{u_P - u_A} \sqrt{u_i - u_A}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2} \sqrt{y^2 \frac{u_P - u_A}{u_A - u_i} + 1}} \quad (\text{D24}).$$

Wir können etwas kürzen:

$$\Delta\varphi = \frac{4}{\sqrt{2M} \sqrt{u_i - u_A}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2} \sqrt{y^2 \frac{u_P - u_A}{u_A - u_i} + 1}} \quad (\text{D25}).$$

Der Tausch $u_A - u_i$ gegen $-(u_i - u_A)$ gibt uns:

$$\Delta\varphi = \frac{4}{\sqrt{2M} \sqrt{u_i - u_A}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2} \sqrt{1 - y^2 \frac{u_P - u_A}{u_i - u_A}}} \quad (\text{D26}).$$

Mit der Abkürzung:

$$k^2 = \frac{u_P - u_A}{u_i - u_A} \quad (\text{D27})$$

bekommen wir die angenehme Form:

$$\Delta\varphi = \frac{4}{\sqrt{2M} \sqrt{u_i - u_A}} \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1 - y^2} \sqrt{1 - k^2 y^2}} \quad (\text{D28}).$$



Die Form (D28) ist deswegen angenehm, weil sie es uns gestattet das Integral in beliebiger Näherung zu lösen, indem wir es als Produkt auffassen:

$$\Delta\varphi = \frac{4}{\sqrt{2M} \sqrt{u_i - u_A}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-k^2 y^2}} dy \quad (\text{D29}),$$

dessen zweiten Faktor wir als Taylor-Reihe entwickeln können. Es sei also

an der Stelle $y = y_0 = 0$ entwickelt:

$$R(y) = \frac{1}{\sqrt{1-k^2 y^2}} \approx \sum_{l=0}^N \frac{d^l R(y)}{dy^l} \Big|_{y=0} \cdot y^l \quad (\text{D30}).$$

Da die Ableitungen nach „Schema F“ leicht zu finden sind, wird das hier nicht vorgeführt, wir geben lediglich die Resultate an. In der üblichen Näherung bis zur 2. Ordnung folgt:

$$R(y) = 1 + \frac{1}{2} k^2 y^2 \quad (\text{D31}).$$

Für den späteren Vergleich mit den Post-Einstein-Effekten ist es notwendig noch, die nächsthöhere Ordnung anzugeben:

$$R(y) = 1 + \frac{1}{2} k^2 y^2 + \frac{3}{8} k^4 y^4 \quad (\text{D32}).$$

Damit erhalten wir je nach Ordnung der Näherungen für das Integral (D29):

$$\Delta\varphi = \frac{4}{\sqrt{2M} \sqrt{u_i - u_A}} \int_0^1 \frac{1 + \frac{1}{2} k^2 y^2}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{1}{\sqrt{2M}} \frac{4}{\sqrt{u_i - u_A}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{8} \pi \cdot k^2 \right) \quad (\text{D33}),$$

oder

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{4}{\sqrt{2M} \sqrt{u_i - u_A}} \int_0^1 \frac{1 + \frac{1}{2} k^2 y^2 + \frac{3}{8} k^4 y^4}{\sqrt{1-y^2}} dy = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2M}} \frac{4}{\sqrt{u_i - u_A}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{8} \pi \cdot k^2 + \frac{9}{128} \pi \cdot k^4 \right) \end{aligned} \quad (\text{D34}).$$

Der Vorteil der Reihenentwicklung in dieser Form besteht eben darin, dass das Integral stets in zwei Typen von Integralen zerfällt, die einfach integrierbar sind. Typ I folgt aus dem ersten Term:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + \text{konst.} \quad (\text{D35}),$$



und ist vermutlich in jeder Integraltafel zu finden. Der Typ II hat ebenfalls eine sehr angenehme Form, auch wenn einige Substitutionen erforderlich sind, bis es ausgerechnet werden kann, also die allgemeine Form des Integrals ist:

$$I = \int \frac{k^n y^n}{\sqrt{1 - k^2 y^2}} dy \quad (\text{D36}).$$

Mittels der ersten Substitution:

$$\begin{aligned} x &= ky \\ dy &= \frac{1}{k} dx \end{aligned} \quad (\text{D37})$$

ergibt sich die Form:

$$I = \frac{1}{k} \int \frac{x^n}{\sqrt{1 - x^2}} dx \quad (\text{D38}).$$

Ein solches Integral findet mit der Substitution:

$$\begin{aligned} x &= \sin(t) \\ dx &= \cos(t) dt \end{aligned} \quad (\text{D39})$$

die Form:

$$I = \frac{1}{k} \int \frac{\sin^n(t)}{\sqrt{1 - \sin^2(t)}} dt \quad (\text{D40}).$$

Wegen $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ und damit $\sqrt{1 - \sin^2(t)} = \cos(t)$ ergibt sich aus (D40) schließlich:

$$I = \frac{1}{k} \int \frac{\sin^n(t)}{\cos(t)} dt = \frac{1}{k} \left[-\frac{\sin^{n-1}(t)}{n-1} + \int \frac{\sin^{n-2}(t)}{\cos(t)} dt \right] \quad (\text{D41}).$$

An (D41) können wir ablesen, dass wir das Integral sukzessive für jede beliebige Potenz berechnen können, ohne es hier vorführen zu müssen. Auf diese Weise können wir Näherungen von jeder beliebigen Ordnung von (D29) finden.

Kommen wir nun zurück zur Periheldrehung gemäß (D33):

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{2M}} \frac{4}{\sqrt{u_i - u_A}} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{8} \pi \cdot k^2 \right) \quad (\text{D33}).$$

Da wir alle Größen kennen, ist es möglich $\Delta\varphi$ bereits mit (D33) zu berechnen. Es soll aber auch Einsteins berühmte Näherungsformel aus dem Jahre 1915 hergeleitet werden. Dazu sind noch einige Schritte nötig.



Es sei aber auch darauf hingewiesen, dass die Herleitung sich nicht an den Sitzungsbericht vom 18. November 1915 der Berliner Akademie der Wissenschaften halten wird, da Einstein kaum Erläuterungen gibt und gewisse Schritte den Eindruck erwecken, Näherungen „mit der heißen Nadel gestrickt zu haben“, wenn man so reden möchte, und das, ohne jede Begründung oder methodische Einlassung.

Beispielsweise identifiziert Einstein einfach u_{in} mit $2M$, ohne das zu erklären. Nun, Einstein darf das, wir versuchen hingegen, jeden Schritt nachvollziehbar zu gestalten.

Auf Grund von (D11) ist es möglich, u_1 durch den Perihel- und Aphel-Term auszudrücken:

$$2Mu_i = 1 - 2Mu_p - 2Mu_A \quad (D42).$$

Setzen wir das in die Wurzel ein, dann ergibt sich:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - 2Mu_p - 4Mu_A}} \left(1 + \frac{1}{4}k^2 \right) \quad (D43).$$

Zugleich haben wir $\frac{\pi}{2}$ vor die Klammer gezogen. Wir betrachten nun den Wurzelausdruck isoliert und entwickeln diesen als Taylor-Reihe an der Stelle $x = 0$:

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots \quad (D44)$$

nach Potenzen von x , wobei wir in Gedanken

$$x = 2Mu_p + 4Mu_A \quad (D45)$$

gesetzt haben. Allerdings beschränken wir uns in der Näherung nur auf die ersten beiden Terme, dann folgt:

$$\Delta\varphi = 2\pi \cdot (1 + M(u_p + 2u_A)) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}k^2 \right) \quad (D46).$$

Nun befassen wir uns mit einer Näherung für k^2 , das wir in (D27) definiert haben. Auch in (D27) können wir u_i mittels (D12) substituieren:

$$k^2 = \frac{u_p - u_A}{u_i - u_A} = \frac{u_p - u_A}{1 - 2Mu_p - 4Mu_A} 2M \quad (D47).$$

Wie schon bei dem Wurzelfaktor so auch hier entwickeln wir den Bruch:

$$B(x) = \frac{1}{1-x} = 1 - x + x^2 - \dots \quad (D48).$$

Hier interessieren wir uns wieder nur für den ersten der beiden Terme, um höhere Potenzen als lineare zu vermeiden. Wir nähern also k^2 durch:



$$k^2 = 2M(u_p - u_A) \quad (D49).$$

Mit (D49) wird aus (D46) der Ausdruck:

$$\Delta\varphi = 2\pi \cdot (1 + M(u_p + 2u_A)) \left(1 + \frac{1}{2}M(u_p - u_A)\right) \quad (D50).$$

Wir lösen nun die Klammern auf, lassen aber dabei konsequent ebenfalls alle quadratischen Terme weg:

$$\Delta\varphi = 2\pi \cdot \left(1 + \frac{3}{2}Mu_p + \frac{3}{2}Mu_A\right) \quad (D51).$$

An dieser Form lässt sich die Periheldrehung bereits schön ablesen, wenn wir die Klammer auflösen:

$$\Delta\varphi = 2\pi + 3\pi M(u_p + u_A) \quad (D52).$$

Der 2π - Term beschreibt die volle Umrundung im raumfesten Koordinatensystem, aber das neue Perihel wird erst nach einem zusätzlichen Winkel δ , mit

$$\delta = 3\pi M(u_p + u_A) \quad (D53)$$

erreicht. Aus diesem Ausdruck werden wir jetzt Einsteins berühmte Formel herleiten. Dafür müssen wir geeignete Ausdrücke für u_p und u_A konstruieren, welche die Exzentrizität e und die große Halbachse a enthalten. Aus der Ellipsengleichung (145) ergeben sich die Definitionen von Perihel und Aphel:

$$1 + e = \frac{p}{r_{\text{Perihel}}}$$

$$1 - e = \frac{p}{r_{\text{Aphel}}}$$

(D54).

Wir eliminieren zuerst den Bahnparameter p durch Umstellen und Gleichsetzen der beiden Gleichungen und zugleich führen wir mit (D2) die Größen u_p und u_A ein, dann folgt:

$$u_p = \frac{1+e}{1-e} u_A \quad (D55).$$

Die große Halbachse einer Ellipse ist durch:

$$2a = r_{\text{Perihel}} + r_{\text{Aphel}} \quad (D56)$$

definiert. Mit den Substitutionen (D2) ergibt sich für (D56):

$$2a = \frac{1}{u_p} + \frac{1}{u_A} \quad (D57).$$



Die Gleichungen (D55) und (D57) bilden ein Gleichungssystem von zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten u_p und u_A . Dieses Gleichungssystem wird jetzt gelöst, die Lösungen werden im Anschluss in (D61) eingesetzt, die dann folgende Rechnung führt direkt auf Einsteins berühmte Gleichung. Doch zunächst die Lösung des Gleichungssystems!

Aus (D57) folgt unmittelbar:

$$2a - \frac{1}{u_p} = \frac{1}{u_A} \quad (\text{D58}),$$

und aus (D55) ergibt sich:

$$\frac{1+e}{1-e} \frac{1}{u_p} = \frac{1}{u_A} \quad (\text{D59}).$$

Durch das Gleichsetzen von (D58) und (D59) eliminieren wir u_A und finden:

$$u_p = \left(\frac{1+e}{1-e} + 1 \right) \frac{1}{2a} \quad (\text{D60}).$$

Gehen wir mit diesem Ergebnis in (D59) ein, dann finden wir die zweite Unbekannte unseres Gleichungssystems:

$$u_A = \left(\frac{1-e}{1+e} + 1 \right) \frac{1}{2a} \quad (\text{D61}).$$

Mit diesen beiden Ergebnissen, (D60) und (D61), gehen wir jetzt in die Gleichung (D53), welche die Periheldrehung je Umlauf beschreibt ein:

$$\delta = 3\pi M \left(\frac{\frac{1+e}{1-e} + 1}{2a} + \frac{\frac{1-e}{1+e} + 1}{2a} \right) \quad (\text{D62}),$$

und nach kurzer Rechnung ergibt sich das gesuchte Resultat:

$$\delta = \frac{6\pi M}{a(1-e^2)} \quad (\text{D63}),$$

bzw. mit der Definition (9) für die Größe M folgt:

$$\delta = \frac{6\pi\gamma M_0}{ac^2(1-e^2)} \quad (\text{D64}).$$

In dieser von Einstein vorgenommen Näherung ergibt sich unter den in Anhang C angegebenen Basisdaten ein Periheldrehung in 100 siderischen Jahren von:



$$\delta = 42,998114(3)'' \quad (D65).$$

Für uns ist es aber nicht erforderlich, die Näherungen so grob durchzuführen. Verwenden wir (D33), ohne jede weitere Näherung, dann finden wir:

$$\delta = 42,998261(8)'' \quad (D66).$$

Und nach (D34), d.h. in 4. Ordnung finden wir:

$$\delta = 42,998262(2)'' \quad (D67).$$

Die Formel (D67) bildet auch die numerische Computergenauigkeit ab. Es ist aber zu berücksichtigen, dass die Werte für die Periheldrehung davon abhängen, wie genau die Gravitationskonstante bekannt ist, und das ist ein Problem, denn keine Konstante ist so unsicher, wie diese, was ein Blick auf die folgende Tabelle zeigt:

Tabelle (D68): Messungen der Gravitationskonstante in verschiedenen Laboren

Labor	$f \cdot 10^{11}$	(ppm)
New Zealand MSL	6.6742(6)	90
Zürich	6.6749(14)	210
Wuppertal	6.6735(9)(13)	240
JILA	6.6873(94)	1400
BIPM	6.683(11)	1650
Karagioz (Russia)	6.6729(5)	75
Luther/Towler 1982	6.6726(5)	64
PTB 1995	6.71540(56)	83

Der größte Wert wird von der Physikalisch Technischen Bundesanstalt angegeben, der kleinste Wert stammt von Luther und Towler. Der Wert der Bundesanstalt scheint ein Ausreißer zu sein. Der Autor hat sich daher bei den Berechnungen für einen Mittelwert unter Ausschluss des PTB-Wertes als Berechnungsgrundlage entschieden. Der Maximalwert und der Minimalwert der Tabelle als Grundlage von Berechnungen führen auf eine rechnerische Spannweite für die berechnete Periheldrehung von

$$2\Delta\delta = 0,275'' \quad (D69),$$

d.h. aus dem Minimalwert folgt eine Periheldrehung von:

$$\delta_{\gamma-Min} = 42,2927'' \quad (D70).$$

Und aus dem Maximalwert eine Periheldrehung von:



$$\delta_{\gamma-Max} = 43,2454'' \quad (D71).$$

Der Wert in der Mitte, nicht der Mittelwert aller Messungen, zwischen diesen beiden Grenzen ist:

$$\delta_{\gamma-Mitte} = 42,7676'' \quad (D72).$$

Diesem aus der Ungenauigkeit der Gravitationskonstante resultierenden theoretischen Ergebnisintervall steht ein gemessenes Intervall der relativistisch bedingten Periheldrehung des Planeten Merkur gegenüber:

Tabelle (D73): Messungen der relativistischen Periheldrehung:

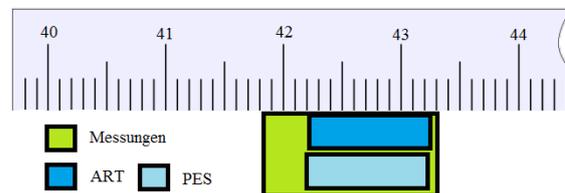
Jahr	Autoren	Methode	Ergebnis
1975	Morrison, Ward, 1975	Merkurdurchgänge	41,90'' ± 0,50''
1976	Shapiro, 1976	Radar	43,10'' ± 0,21''
1987	Anderson, 1987	Radar	42,92'' ± 0,20''
1991	Anderson, 1991	Radar	42,94'' ± 0,20''
1992	Anderson, 1992	Radar	43,13'' ± 0,14''

Wählen wir einschließlich der Berücksichtigung der möglichen Messfehler die minimalste und die maximalste gemessene Periheldrehung aus, dann erhalten wir:

$$\delta_{Messung-Min} = 41,85''$$

$$\delta_{Messung-Mitte} = 42,06''$$

$$\delta_{Messung-Max} = 43,27''$$



(D74),

mit einer Intervallgröße von:

$$2\Delta\delta_{Messung} = 2,42'' \quad (D75).$$

Der mittlere Wert stellt die rechnerische Mitte zwischen dem maximalen und dem minimalen Werten dar, es ist nicht der Mittelwert aller Messungen. Der Mittelwert aller Messungen ist:

$$\bar{\delta}_{Messung} = 42,798'' \quad (D76).$$

Erstens: Das maximal mögliche Intervall für die Akzeptanz einer Gravitationstheorie ist durch (D74) gegeben. Zweitens: Das sich aus der Ungenauigkeit der Gravitationskonstante ergebende Messintervall ist deutlich kleiner als das Fehlerintervall der Messungen. Drittens: Die Einstein-Werte und die Post-Einstein-Werte bewegen sich im mittleren bis oberen Teil des zulässigen Bereiches, wobei die Post-Einstein-Werte marginal nach links verschoben sind.





Angang E

Wir gehen der Frage nach, ob aus dem quasi-klassischen Grenzfall der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik, d.h. ob aus dem Gravitationsfeld mit dem Potential:

$$U = -\frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{2} e^{-\frac{2M}{r}} \quad (\text{E1})$$

bereits eine akzeptable Näherung für die Periheldrehung folgt.

Wir wählen das Koordinatensystem und die Abkürzung:

$$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{\pi}{2} \\ \dot{\varphi} &= 0 \\ M &= \frac{\gamma \cdot M_0}{c^2} \end{aligned} \quad (\text{E2}).$$

Für die Untersuchung ist es ausreichend, gleich mit der Gesamtenergie, die eine Erhaltungsgröße ist, zu beginnen:

$$E = \frac{m_0}{2} \dot{r}^2 + \frac{m_0}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 - m_0 \frac{c^2}{2} + m_0 \frac{c^2}{2} e^{-\frac{2M}{r}} = \text{const.} \quad (\text{E3}).$$

Die Lichtgeschwindigkeit hat hier nur den Charakter einer Eichgröße, d.h. wir setzen die Newtonschen Prinzipien, insbesondere Newtons absoluten Raum und Newtons absolute Zeit voraus. Dann ist (E1) ein zum Newtonschen Gravitationspotential alternatives rein klassisches Potential.

Die Drehimpulserhaltung ist ebenfalls gültig:

$$D = m_0 r^2 \dot{\varphi} = \text{const.} \quad (\text{E4}),$$

und aus (E4) folgt:

$$\dot{\varphi}^2 = \frac{D^2}{m_0^2 r^4} \quad (\text{E5}).$$

Setzen wir (E5) in (E3) ein, dann folgt:

$$E = \frac{m_0}{2} \dot{r}^2 + \frac{D^2}{2m_0 r^2} - m_0 \frac{c^2}{2} + m_0 \frac{c^2}{2} e^{-\frac{2M}{r}} = \text{const.} \quad (\text{E6}).$$

Wir können direkt nach \dot{r} umstellen:

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2E}{m_0} - \frac{D^2}{m_0 r^2} + c^2 \left(1 - e^{-\frac{2M}{r}} \right)} \quad (\text{E7}),$$



und das führt durch Trennung der Variablen auf:

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m_0} - \frac{D^2}{m_0^2 r^2} + c^2 - c^2 e^{-\frac{2M}{r}}}} \quad (\text{E8}).$$

Weiter führt (E4) auf:

$$d\varphi = \frac{D}{m_0 r^2} dt \quad (\text{E9})$$

und das Einsetzen von (E8) in (E9) liefert:

$$d\varphi = \frac{\frac{D}{m_0 r^2} dr}{\sqrt{\frac{2E}{m_0} - \frac{D^2}{m_0^2 r^2} + c^2 - c^2 e^{-\frac{2M}{r}}}} \quad (\text{E10}).$$

Zur Beantwortung der Frage nach der Periheldrehung reicht uns der Vergleich mit dem Einstein'schen Ausdruck. Wir müssen dazu nur die e-Funktion als Reihe bis zur 3. Potenz entwickeln, da die 3. Potenz von $\frac{1}{r}$ ausschlaggebend ist:

$$e = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{2M}{r} \right)^2 - \frac{1}{6} \left(\frac{2M}{r} \right)^3 \quad (\text{E11}).$$

Damit finden wir:

$$d\varphi = \frac{\frac{D}{m_0 r^2} dr}{\sqrt{\frac{2E}{m_0} - \frac{D^2}{m_0^2 r^2} + c^2 - c^2 \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{1}{2} \frac{4M^2}{r^2} - \frac{1}{6} \frac{8M^3}{r^3} \right)}} \quad (\text{E12}),$$

und das ergibt:

$$d\varphi = \frac{\frac{D}{m_0 r^2} dr}{\sqrt{\frac{2E}{m_0} - \frac{D^2 + 2M^2 c^2}{m_0^2 r^2} + \frac{2Mc^2}{r} + \frac{4}{3} \frac{M^3 c^2}{r^3}}} \quad (\text{E13}).$$

Wir sehen hier ganz offensichtlich, dass sich der entscheidende Term $\frac{3}{4} \frac{M^3 c^2}{r^3}$ wesentlich, nicht nur quantitativ, sondern auch qualitativ, vom ART-Term $\frac{2MB^2}{r^3}$ unterscheidet. Das quasi-klassische Potential

Einstein- und Post-Einstein-Effekte im Zentralfeld

Klaus Retzlaff



(E1) liefert unter dem Regime der Newtonschen Prinzipien völlig falsche Werte für die Periheldrehung. Das kann auch dahingehend interpretiert werden, dass seine Benutzung unter Newtonschen Prinzipien, d.h. als bloßes Substitut für Newtons Potential, problematisch ist.