Ladungsinduzierte Antigravitation im Coulomb-Feld

Klaus Retzlaff

6.11.2017

Zusammenfassung: *In der Allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins (1915) wird das kugelsymmetrische Gravitationsfeld um eine Ladung durch die Reissner-Nordström-Metrik beschrieben, wobei diese Metrik einen antigravitativen Term enthält. Aufgrund der Stärke der elektrischen Kraft gegenüber der gravitativen Attraktion sowie einer spezifischen Abstandsabhängigkeit des antigravitativen Terms dominiert die Antigravitation im Bereich kleiner Distanzen (Nahfeld). Diese effektiv wirksame Antigravitation wird für ein Elektron berechnet. Im Ergebnis wird ein prinzipiell messbarer Effekt deduziert. Untersuchungen in dieser Richtung existieren bisher vermutlich nicht, weil in der Teilchenphysik angenommen wird, dass die Gravitation in diesem Bereich keine Rolle spielt. Es wird gezeigt, dass das Gegenteil der Fall ist, dass insbesondere wegen der Stärke der elektrischen Kraft im Mikrokosmos metrische Theorien der Gravitation zu berücksichtigen sind, wenn es um die Feinstruktur der Elementarteilchen geht, z.B. ob das Elektron wirklich keine innere Struktur besitzt. Doch die Teilchenphysiker haben in einem Punkt Glück, denn die Antigravitation sorgt gerade dafür, dass in der heute experimentell zugänglichen Umgebung geladener Elementarteilchen die Gravitation nicht einfach nur viel kleiner als die Coulomb-Kraft ist, sondern, dass sie nahezu vollständig verschwindet! Nach der klassischen Newtonschen Gravitationstheorie existiert ein solcher antigravitativer Effekt nicht.*
Der Artikel gibt Anlass über die Beziehung zwischen elektrischer Ladung und Gravitation neu nachzudenken. Gilt Einsteins Allgemeine Relativitätstheorie auch für geladene Teilchen, dann ist die Auffassung, dass jede Form der Materie das Gravitationsfeld verstärkt, als widerlegt zu betrachten. Sogar ungeladene Teilchen werden von geladenen Teilchen durch ihre gravitative Abstoßung im Nahfeld in ihrer Bewegung beeinflusst. Wenn es keine makroskopischen antigravitativen Effekte gibt, dann wäre die ART widerlegt!

***

Gravitation und Antigravitation im statischen Gravitationsfeld einer Punktladung

Das kugelsymmetrische Gravitationsfeld eines geladenen Teilchens wird in der Allgemeinen Relativitätstheorie Einsteins aus dem Jahre 1915 durch die Metrik

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-\frac{2M}{r}+\frac{4\pi\gamma}{c^4}\frac{n^2\varepsilon^2}{r^2}} + r^2\left(d\vartheta^2+\sin^2(\vartheta)d\varphi^2\right) - \left(1-\frac{2M}{r}+\frac{4\pi\gamma}{c^4}\frac{n^2\varepsilon^2}{r^2}\right)c^2dt^2 \qquad (1)$$

beschrieben[1]. Die Metrik (1) ist eine exakte Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen[1]. In (1) ist ε^2 mit dem Quadrat der elektrischen Elementarladung e über die Beziehung

$$\varepsilon^2 = \frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0} \qquad (2)$$

verknüpft, n ist die Anzahl der Ladungen und γ ist die Newtonsche Gravitationskonstante. Die Größe ε_0 ist die elektrische Feldkonstante[2]. Die Bedeutung der übrigen Größen wird als bekannt vorausgesetzt.

Für die Interpretation sind die Terme im Nenner N_{11} der Radius-Radius-Komponente g_{11} des metrischen Tensors bedeutsam, welche identisch mit Termen in der Zeit-Zeit-Komponente sind. Konkret meinen wir den Ausdruck

$$N_{11} = 1-\frac{2M}{r}+\frac{4\pi\gamma}{c^4}\frac{n^2\varepsilon^2}{r^2} \qquad (3).$$

Die Größe M ist die in Einheiten einer Länge ausgedrückte Ruhemasse des jeweiligen Ladungsträgers. Das negative Vorzeichen führt zu einer Deformation der Metrik, die bekanntlich die Bewegung von Objekten so modifiziert, dass diese Bewegung als Folge einer gravitativen Anziehung interpretiert wird. Für $M=0$ und $\varepsilon=0$ geht die Metrik (1) in die pseudoeuklidische Metrik des Minkowski-Raumes der Speziellen Relativitätstheorie über. Im Minkowski-Raum herrscht weder Gravitation noch

---

[1] Reissner-Nordström-Metrik

[2] $\varepsilon_0 = 8{,}854187817\cdot10^{-12}\,\frac{C}{Vm}$

Antigravitation. Der dritte Term $+\dfrac{4\pi\gamma}{c^4}\dfrac{n^2\varepsilon^2}{r^2}$ wirkt ganz offensichtlich aufgrund seines positiven Vorzeichens dem gravitativen Term $-\dfrac{2M}{r}$ entgegen und belegt dadurch, dass von jeder Ladung eine antigravitative Wirkung ausgeht, da die Ladung quadratisch in den Term eingeht. Wir bezeichnen diese Wirkung als *ladungsinduzierte Antigravitation*. Selbst, wenn die Gravitation dominiert, so mildert die ladungsinduzierte Antigravitation das Gravitationsfeld ab.

Der Dominanzradius der ladungsinduzierten Antigravitation

Ein einfacher Blick auf (3) zeigt, dass der Gravitationsterm und der Antigravitationsterm eine unterschiedliche r-Abhängigkeit aufweisen. Die Gravitation fällt langsamer, nämlich $\propto r^{-1}$ ab, während die Antigravitation $\propto r^{-2}$ abfällt. Aus diesem Grund muss unter allen Umständen für hinreichend große Abstände die Gravitation dominieren, während umgekehrt für hinreichend kleine Distanzen die Antigravitation gegenüber der Gravitation über alle Schranken anwachsen muss.
Da die Größen in (3) den Charakter von Potentialen und nicht von Feldstärken besitzen, ist es so, dass die Antigravitation sogar die Coulombsche Feldstärke dominieren muss, da das Coulombsche Potential nur eine Abhängigkeit $\propto r^{-1}$ aufweist.
Auf Grund der unterschiedlichen Abstandsabhängigkeiten der Terme in (3) kann unter den Voraussetzungen $M > 0$ und $e \neq 0$ der Dominanzradius für die Antigravitation aus der Bedingung $N_{11} = 1$ berechnet werden. Diese Bedingung führt auf die Gleichung

$$0 = -\frac{2M}{r} + \frac{4\pi\gamma}{c^4}\frac{n^2\varepsilon^2}{r^2} \qquad (4)$$

und wir erhalten aus (4) die Lösung:

$$R_A = r = \frac{2\pi\gamma}{Mc^4} n^2\varepsilon^2 \qquad (5).$$

Die Verwendung des Großbuchstabens kennzeichnet den spezifischen Radius und der Index A soll auf die Terminologie „Antigravitation“ verweisen. Die Beziehung (5) ist bemerkenswert, denn bedenkt man, dass M durch

$$M = \gamma\frac{M_0}{c^2} \qquad (6)$$

definiert ist, dann führt das Einsetzen von (6) in (5) auf

$$R_A = 2\pi\frac{n^2\varepsilon^2}{M_0c^2} \qquad (7).$$

In dem Ausdruck (7) tritt die Gravitationskonstante nicht auf. Der Faktor $\dfrac{n^2\varepsilon^2}{M_0c^2}$ hat die Dimension einer Länge und er erscheint formal in der Funktion eines Radius R und die Größe R_A erscheint formal als Umfang[3]:

$$U = 2\cdot\pi\cdot R \qquad (8).$$

Hat das etwas zu bedeuten oder ist das nur eine Kuriosität?
In jedem Fall herrschen im Abstand $r = R_A$ um eine Punktladung exakt pseudoeuklidische Verhältnisse. Die Metrik ist exakt minkowskisch. Erst für $r > R_A$ beginnt die Gravitation wirksam zu werden und geht allmählich in die Schwarzschild-Metrik einer ladungsfreien Raum-Zeit über.
Für Radien $r < R_A$ beherrscht die Antigravitation das Geschehen.

Die Antigravitation im Nahfeld des Elektrons

In diesem Abschnitt wollen wir uns einen Eindruck davon verschaffen, in welcher Größenordnung dieser Effekt bei einem Elementarteilchen, wie dem Elektron, in Erscheinung tritt. Ein Elektron hat betragsmäßig die gleiche Ladung, wie ein Proton, doch seine Masse ist wesentlich kleiner. Darum erscheint das Elektron als bester Kandidat. Wir legen der Berechnung die folgenden Daten zugrunde:

Masse: $M_0 = 9{,}10938356\cdot 10^{-31}kg$

Ladung: $e = -1{,}6021766209\cdot 10^{-19}C$

---

[3] Hier ist $U = R_A$ gesetzt.

Gravitationskonstante:

$$\gamma = 6{,}677 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$$

Vakuumlichtgeschwindigkeit:

$c = 2{,}99792458 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$. Aus diesen Daten ergibt sich gemäß (6) der Parameter

$M = 6{,}7675 \cdot 10^{-58} m$.

Der Schwarzschild-Radius des Elektrons, wäre es ungeladen, ist dann

$r_S = 2M = 13{,}535 \cdot 10^{-58} m$.

Berücksichtigen wir die Ladung des Elektrons, so zeigt sich, dass für ein geladenes Elektron kein Schwarzschild-Radius existiert. Die Bedingung für die Existenz eines Schwarzschild-Radius ist durch

$$N_{11} = 0 \qquad (9)$$

gegeben, d.h.

$$0 = 1 - \frac{2M}{R_0} + \frac{4\pi\gamma}{c^4} \frac{\varepsilon^2}{R_0^2} \qquad (10).$$

Setzen wir in diesen Ausdruck (2) ein, dann ergibt sich:

$$0 = 1 - \frac{2M}{R_0} + \frac{\gamma \cdot e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^4} \frac{1}{R_0^2} \qquad (11).$$

Die Beziehung (11) führt auf die quadratische Gleichung:

$$0 = R_0^2 - 2MR_0 + \frac{\gamma \cdot e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^4} \qquad (12),$$

mit den Lösungen

$$R_{0,1/2} = M \pm \sqrt{M^2 - \frac{\gamma \cdot e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^4}} \qquad (13).$$

Wie sich zeigt, ist die Determinante der Wurzel in (13) negativ und der Schwarzschild-Radius ist komplexwertig, $R_{0,1/2} \in \Im$, konkret:

$$R_{0,1} = 6{,}77 \cdot 10^{-58} m + 1{,}38 \cdot 10^{-36} m \cdot j$$

$$R_{0,2} = 6{,}77 \cdot 10^{-58} m - 1{,}38 \cdot 10^{-36} m \cdot j \quad (14).$$

$$j^2 = -1$$

Auch für das viel schwerere Proton existiert kein Schwarzschild-Radius. Damit für ein geladenes Teilchen nach der Allgemeinen Relativitätstheorie ein Schwarzschild-Radius existiert, muss die Bedingung

$$M^2 > \frac{\gamma \cdot e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^4} \qquad (15)$$

erfüllt sein, d.h. die Ruhemasse muss mindestens

$$M_0 = 1{,}859 \cdot 10^{-9} kg \qquad (16)$$

betragen. Ein Teilchen, welches eine Elementarladung trägt, müsste ungefähr $2 \cdot 10^{21}$ mal so schwer wie ein Elektron sein, damit ein Schwarzschild-Radius existiert! Diese ungeheure Dimension ist ein Ausdruck für die extreme Antigravitation, die allein von einer einzigen Elementarladung ausgelöst wird. Die metrischen Verhältnisse um ein geladenes Elementarteilchen sind daher wesentlich antigravitativ! Es stellt sich daher die Frage: Ist es überhaupt richtig, die Gravitation/Antigravitation im Bereich der Elementarteilchen zu vernachlässigen?

Wir berechnen nun den Radius, für den sich gemäß der Beziehung (5) Gravitation und Antigravitation in der Reissner-Nordström-Metrik exakt ausgleichen. Setzen wir in die Beziehung (5) die Beziehung (2) ein und setzen wir zugleich $n = 1$, dann finden wir

$$R_A = \frac{\gamma \cdot e^2}{8\pi c^4 \varepsilon_0 M} \qquad (17).$$

Setzen wir alle Größen ein, dann ergibt sich der Radius zu

$$R_A = 1.408970161 \cdot 10^{-15} m \qquad (18).$$

Der klassische Elektronen-Radius ist lt. CODATA 2015:

$$R_e = 2{,}8179403227 \cdot 10^{-15} m \qquad (19).$$

Wir erkennen beim Vergleich mit (18) sofort einen Faktor 2:

$$2 \cdot R_A = 2{,}817940322 \cdot 10^{-15} m \qquad (20),$$

bis zur 8. Kommastelle! Wir machen darauf aufmerksam, dass der klassische Elektronen-Radius überhaupt nichts mit der Gravitation zu tun hat und eigentlich auch kein realer Radius des Elektrons ist. Er ist ein theoretisches Konstrukt. Zur Bestimmung des klassischen Elektronen-Radius stellt man sich die Ladung des Elektrons gleichmäßig auf einer Kugelschale verteilt vor. Die Kugelschale habe zunächst einen unendlichen Durchmesser. Der klassische Elektronen-Radius ergibt sich dann rechnerisch aus der Arbeit, die erforderlich ist, diese Kugel so lange auf einen Radius zu schrumpfen, bis die dafür aufgewendete Arbeit gleich dem Produkt aus Ruhemasse des Elektrons und dem Quadrat der Lichtgeschwindigkeit ist. Diese Betrachtung hat nichts mit der Gravitation zu tun. An die Gravitation wird dabei überhaupt nicht gedacht. Sie fließt in die Berechnung nicht ein, weil die elektrische Kraft um einen Faktor 10^{41} größer ist als die Gravitationskraft. Tatsächlich entfällt die Gravitationskonstante aus der Beziehung (17), wenn wir M durch M_0 ersetzen, d.h., wenn wir (6) in (17) einsetzen:

$$R_A = \frac{e^2}{8\pi c^2 \varepsilon_0 M_0} = \frac{1}{2} R_e \qquad (21).$$

Die Formel für den klassischen Elektronen-Radius ist

$$R_e = \frac{e^2}{4\pi c^2 \varepsilon_0 M_0} \qquad (22).$$

Das Wegfallen der Gravitationskonstante haben wir schon in (7) bemerkt. Die Konstante fällt aus der Beziehung heraus, weil die Ruhemasse des Elektrons und die Größe $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 c^4}$ in gleicher Weise mit der Gravitationskonstante verbunden sind.

Es sei angemerkt, dass in den heutigen Experimenten Elektronen weder eine Ausdehnung, noch eine innere Struktur zeigen, so dass ein Elektron als punktförmig angesehen werden kann. Ein realer Radius müsste kleiner $10^{-19} m$ sein, um mit den Experimenten verträglich zu sein. Trotzdem spielt der klassische Elektronen-Radius in vielen Formeln, z.B. in Formeln für Wirkungsquerschnitte[4], eine wichtige Rolle. Warum sich hier eine mit dem Elektronen-Radius numerisch in Beziehung stehende Größe aus einer Betrachtung zur Antigravitation herleitet, ist zunächst einmal unverstanden, denn R_A hat eine direkte Beziehung zur Gravitation: *Am Radius* R_A *gleicht der Gravitationsterm exakt den von der Ladung bedingten Antigravitationsterm aus!*

Aber der klassische Elektronen-Radius bestimmt sich aus einer Konstruktion, *wonach die Ruhemasse des Elektrons in Beziehung zur Arbeit gesetzt wird, die für die Verdichtung der Ladung – wie vorne bereits beschrieben - erforderlich ist.* Eine Beziehung zwischen beiden physikalischen Aspekten besteht nur über die Ruhemasse des Elektrons und den Herleitungsregeln (Feldgleichungen, Grenz- und Anschlussbedingungen) der ART, die eindeutig auf die Reissner-Nordström-Metrik führen. Diese Regeln bewirken, dass es möglich ist, die Reissner-Nordström-Metrik auch mit Hilfe des klassischen Elektronen-Radius auszudrücken:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \gamma \frac{2M_0}{c^2}\frac{1}{r} + \gamma \frac{M_0 R_e}{c^2}\frac{1}{r^2}} +$$
$$+ r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta) d\varphi^2\right) - \qquad (23).$$
$$-\left(1 - \gamma \frac{2M_0}{c^2}\frac{1}{r} + \gamma \frac{M_0 R_e}{c^2}\frac{1}{r^2}\right) c^2 dt^2$$

oder, wenn wir mit den mathematischen Formen spielen möchten:

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{M \cdot R_e}{r^2}} +$$
$$+ r^2\left(d\vartheta^2 + \sin^2(\vartheta) d\varphi^2\right) - \qquad (24).$$
$$-\left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{M \cdot R_e}{r^2}\right) c^2 dt^2$$

Doch für eine Diskussion sind die Beziehungen (23) und (24) nicht gut geeignet, weil stets bedacht werden muss, dass in den Antigravitationsterm die Masse oder ein Massenparameter gar nicht eingeht. Die Antigravitation wird allein durch die Ladung bestimmt! Die Möglichkeit, den klassischen Elektronen-Radius formal ins Spiel zu bringen, bedeutet leider nicht, dass es eine physikalisch bedeutsame Beziehung zwischen dem Gleichgewichtsradius R_A und dem klassischen Elektronenradius geben muss.

Physikalisch bedeutsamer ist die Feststellung, dass das Elektron gemeinhin als Punktteilchen

[4] Bei der Streuung von Röntgenstrahlung erhält man einen Wirkungsquerschnitt, der einem effektiven Elektronen-Radius $\approx 3 \cdot 10^{-15} m$ entspräche.

angesehen wird und, dass der Radius R_A die bisherige Auffassung der Physik untermauert, dass es erlaubt ist, in der Umgebung geladener Teilchen so zu tun, als würde es dort keine Gravitation geben. Die Antigravitation sorgt in der Tat dafür, dass quasi-euklidische Verhältnisse existieren. Aber die selbe Ursache, welche das Elektron für den Beobachter als punktförmiges Teilchen erscheinen lässt, sorgt zugleich dafür, dass es möglich ist, dass sich im Elektron eine reichhaltige Struktur verbergen kann, die nur darum nicht in Erscheinung tritt, weil die Metrik in entsprechender Weise deformiert ist. Wir können das unmittelbar am Verhalten der entsprechenden Tensorkomponenten erkennen. Unterschreiten wir den Radius R_A, dann dominiert die Antigravitation und das wirkt auf die Maßbestimmung so, dass für $r \to 0$ die Radius-Radius Komponente ebenfalls gegen null konvergiert, d.h. $g_{11} \to 0$. Zugleich divergiert die Zeit-Zeit-Komponente: $g_{44} \to -\infty$. Das ist das gegenteilige Bild, welches wir vom Verhalten der Metrik eines Schwarzen Loches kennen. In der Umgebung eines Schwarzen Loches frieren für den weit entfernten ruhenden Beobachter alle Bewegungen in der Nähe des Schwarzschild-Radius ein, weil die Radius-Radius-Komponente expandiert und die Zeit dilatiert. Die Antigravitation bewirkt genau das Gegenteil, eine Zeitbeschleunigung und Zusammenziehung der Raum-Komponente – für den außenstehenden Beobachter! Leider können wir nicht sagen, was ein neutrales Teilchen „erleben" würde, wenn es in den Bereich $r < R_A$ hineingeschossen würde, weil wir uns bereits in den Dimensionen bewegen, die den Gesetzmäßigkeiten der Quantenmechanik unterliegen. Zur Beschreibung dieser Verhältnisse muss vielleicht nicht die Gravitation quantisiert werden, aber wir müssten die Klein-Gordon-Gleichung kovariant schreiben und dann ein spinloses Teilchen konstruieren, welches so wenig Masse besitzt, dass es die Metrik des Elektrons nicht stört. Das aber kann nicht Gegenstand dieser Arbeit sein.

Metrische Verhältnisse um eine hoch konzentrierte Ladungswolke

Wir wollen nun untersuchen, wie sich makroskopisch die metrischen Verhältnisse ändern würden, wenn wir zumindest theoretisch ca. 9 Tonnen aus reinstem Elektronengas (10^{35} Elektronen) herstellen könnten und dieses Gas in einer winzigen Kugel von vielleicht 1 mm Durchmesser konzentrieren könnten. Auch wenn das praktisch nicht realisierbar ist, so ermöglicht uns diese Annahme jedoch eine Vorstellung über die erhebliche Größe der Effekte zu gewinnen.

In der Abbildung 1 ist dargestellt, wie sich die Radius-Radius-Komponente und der Betrag der Zeit-Zeit-Komponente des metrischen Tensors entsprechend der Reissner-Nordström-Metrik verhalten würden.

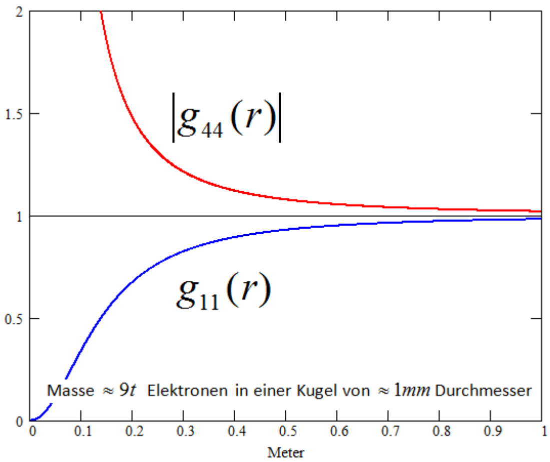

Abbildung 1: Die Komponenten des metrischen Tensors in der Umgebung einer Kugel aus 9 Tonnen reiner Elektronen. Man beachte, dass die Auswirkungen von makroskopischer Dimension sind. Unter spezifischen Bedingungen könnten solche Verhältnisse eine astrophysikalische Bedeutung haben.

Die Abbildung 1 gibt einen Eindruck, wie stark die Verzerrung der Raum-Zeit innerhalb von einem Meter Abstand um die Probe wäre. Um eine ähnlich starke Verzerrung der Metrik zu erreichen, wären dazu ca. 4 Erdmassen analog zu konzentrieren. Natürlich wäre dann das Verhalten der Radius-Radius- und der Zeit-Zeit-Komponente vertauscht, weil eine Masse Gravitation und nicht Antigravitation erzeugt.

Die Kurven wären auch nicht völlig identisch, weil das Abstandsgesetz ein anderes wäre.

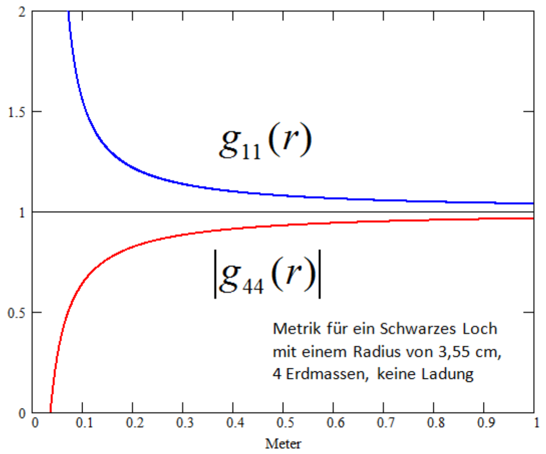

Abbildung 2: Zum Vergleich mit der ersten Abbildung sind die Komponenten des metrischen Tensors für ein ungeladenes Schwarzes Loch dargestellt. Die Zeit-Zeit-Komponente ist wieder in ***rot*** *und die Radius-Radius-Komponente in* ***blau*** *dargestellt.*

Hätten wir eine Masse und keine Ladung für die Verzerrung benutzt, dann hätten wir praktisch ein Schwarzes Loch mit einem Schwarzschild-Radius von 3,55 cm verwenden müssen. Das bedeutet, dass es nach der Allgemeinen Relativitätstheorie möglich ist, mit nur 9 Tonnen eines reinen Elektronengases, welches in einer Kugel von ca. 1mm verdichtet ist, eine Verzerrung der Metrik zu erzeugen, die vom Ausmaß her der Verzerrung entspricht, die in der Nähe eines Schwarzen-Loches herrscht!

Quellen

[1] M.v. Laue, „Die Relativitätstheorie“, zweiter Band, Frieder. Vieweg & Sohn Braunschweig 1956