Ist die Allgemeine Relativitätstheorie nur ein genähertes Gravitationsgesetz?

Klaus Retzlaff

6.5.2018

Zusammenfassung: Es wird aus der Äquivalenz von Trägheit und Schwere eine exakte kugelsymmetrische Metrik des Vakuumfeldes hergeleitet, ohne Bezug auf die Einstein'schen Feldgleichungen oder auf bestimmte Symmetrieeigenschaften der bekannten Schwarzschild-Metrik zu nehmen. Trotzdem gelingt die Herleitung der vom Autor 2017 entdeckten Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik (PES), welche die Schwarzschild-Metrik als Grenzfall enthält [1]. Die Herleitung steht in voller Übereinstimmung mit Einsteins Überlegungen und Rechnungen aus den Jahren 1907/1908 [2], sowie Longair 1991 und 2011 [3] bezüglich des Verhaltens der Zeit-Zeit-Komponente des metrischen Fundamentaltensors. Beide Autoren (Einstein und Longair) führen explizit aus, dass es sich bei der Form der Zeit-Zeit-Komponente, wie sie aus der Schwarzschild-Metrik bekannt ist, nur um eine Näherung handelt. 1907/1908 war Einstein natürlich die Schwarzschild-Lösung noch gar nicht bekannt, die Form der Zeit-Zeit-Komponente lässt sich aber bereits aus Ergebnissen seiner Arbeit exakt herleiten. Gemäß Longair [3] folgt explizit, dass die Einstein'schen Feldgleichungen bezüglich einer solchen Herleitung nur die Näherung für die Zeit-Zeit-Komponente liefern. Die Autoren (Einstein und Longair) untersuchen aber die Radius-Radius-Komponente nicht. Sie bestimmen daher auch keine Metrik des kugelsymmetrischen Feldes. Einstein tat das nicht, weil er nur den gravitativen Effekt abschätzen wollte, Longair tat das nicht, weil er didaktisch zur ART hinführen wollte. Die Überlegungen werden darum von beiden Autoren aus unterschiedlichen Gründen nicht weiter vertieft und nicht zu Ende geführt – das hat ein ganzes Jahrhundert der Gravitationsforschung bestimmt und vielleicht auf eine falsche Fährte geführt!

Der Vertiefung dieser Überlegungen ist der folgende Artikel gewidmet. Es gelingt eine zu Einsteins Überlegungen analoge Herleitung für die Radius-Radius-Komponente des metrischen Tensors und damit auch der exakte Nachweis, dass die Schwarzschild-Metrik nur als Näherung für ein zentralsymmetrisches Gravitationsfeld anzusehen ist – mit schwerwiegenden Folgen für die Interpretation der Einstein'schen Allgemeinen Relativitätstheorie und die Rolle ihrer Feldgleichungen. Das ist jedenfalls die durchaus anfechtbare Auffassung des Autors dieses Artikels – der mit dieser Position ausdrücklich eine kritische Diskussion provozieren möchte!

Mein besonders herzlicher Dank gilt Herrn Dr. habil. rer. nat. P. Streitenberger (Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg) für die nützlichen Hinweise auf die zitierten Arbeiten von Einstein und Longair, die mir bisher unbekannt waren.

***

Überlegungen über Einsteins Haltung zur Allgemeinen Relativitätstheorie

Im Jahre 1965 berichtete der Physiker *Cornelius Lanczos* auf dem Einstein-Symposium in Berlin in seinem Vortrag mit dem Titel: *„Tetraden-Formalismus und definite Raum-Zeit-Struktur“* über seine erste Begegnung mit Albert Einstein um 1922. Lanczos *„hatte eine mathematische Methode gefunden, die stark nichtlinearen Einstein'schen Gravitationsgleichungen durch eine Methode der sukzessiven Integration zu lösen, ohne dabei den bekannten Überbestimmungsschwierigkeiten zu begegnen. … Zu meiner Überraschung und nicht geringen Bestürzung entgegnete er (Einstein): ‚Ja, aber warum soll man sich die Mühe machen, diese Gleichungen streng zu lösen, wo ihnen doch nicht mehr als eine ephemere Bedeutung zukommt.´ Mir kam das unverständlich vor. Hier war eine der größten Entdeckungen aller Zeiten und ihr Urheber übt Verrat, indem er seine eigene Entdeckung gar nicht ernst nimmt.*
Später habe ich Einsteins Einstellung als absolut konsequent zu würdigen gelernt … und eine Theorie gefunden zu haben, die die reine Gravitation beschreibt, war für Ihn schon lange nicht mehr ausreichend.“ [4]

Lanczos vermutet (wie der Autor dieses Artikels auch), dass Einstein auf Grund seiner Suche nach einer einheitlichen Theorie aller (damals) bekannten Felder davon ausgegangen ist, dass die Allgemeine

Relativitätstheorie nur eine vergängliche/flüchtige eben eine ephemere Bedeutung hätte. Trotzdem ist es durchaus möglich, dass Einstein zusätzlich seine Kenntnis [2] aus dem Jahre 1907/1908 im Hinterkopf gehabt haben könnte, in der er die Beziehung

$$t = \tau \cdot \left(1 + \frac{a \cdot s}{c^2}\right) \qquad (1)$$

mit dem expliziten Hinweis angibt, dass (1) nur für kleine Werte der Strecke s gelten kann, da (1) als Näherung 1. Ordnung aus der exakten Beziehung

$$t = \tau \cdot e^{\frac{a \cdot s}{c^2}} \qquad (2)$$

hergeleitet ist. In (1) und (2) bedeuten t die Koordinatenzeit, τ die Eigenzeit, a ist die zunächst als konstant angesehene Beschleunigung von Einsteins berühmtem Fahrstuhl und s ist die betrachtete Beschleunigungsstrecke.
Aus dem Äquivalenzprinzip von Trägheit und passiver Schwere, wonach eine Beschleunigung als Gravitationsfeld aufgefasst werden kann, schlussfolgert Einstein, dass wegen (1) auch

$$t = \tau \cdot \left(1 + \frac{\phi}{c^2}\right) \qquad (3)$$

gelten sollte, wobei ϕ das Gravitationspotential repräsentiert. Einstein ist sich hier explizit bewusst, dass (3) aufgrund von (2) nur als Näherung anzusehen ist, weil er es selbst explizit sagt. Ihm kommt es auf die Näherung an, weil er lediglich die Größenordnung des Effektes abschätzen möchte. Es sei an dieser Stelle an zwei Punkte erinnert, welche für die Beurteilung von Bedeutung sind:

1. Die Beziehung (2) ist eine exakte Folge aus der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik in [1], wenn in Anwendung des schwachen Äquivalenzprinzips vom Gravitationsfeld auf die Beschleunigung geschlossen wird, d.h. die Richtung der Schlussfolgerung ist: G-Feld $\rightarrow a$. Die Richtung der Schlussfolgerung bei Einstein in [2] ist umgekehrt. Einstein schließt: $a \rightarrow$ G-Feld, d.h. Einstein schließt von seinem berühmten beschleunigten Fahrstuhl auf das G-Feld. Auch dieser Schluss ist entsprechend dem schwachen Äquivalenzprinzip exakt, d.h. historisch betrachtet ist Einstein nur eine Haaresbreite davon entfernt, die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik zu entdecken!
2. Dem gegenüber ist (3) in Übereinstimmung mit Einstein und Longair nur als Näherung anzusehen.
3. Die Näherung (3) scheint auf den ersten Blick „schlecht" zu sein, weil man den Faktor 2 vermissen könnte, denn die exakte Zeit-Zeit-Komponente des metrischen Tensors ist gemäß (2)

$$g_{44} = -e^{\frac{2\phi}{c^2}} \qquad (4),$$

mit

$$\phi = -\frac{M}{r} \qquad (5)$$

und

$$M = \frac{\gamma \cdot M_0}{c^2} \qquad (6),$$

wenn γ die Newtonsche Gravitationskonstante, c^2 das Quadrat der Vakuumlichtgeschwindigkeit und M_0 die in kg gemessene Masse der Gravitationsquelle im kugelsymmetrischen Gravitationsfeld sind. Geht man von (4) aus, wäre die Näherung in erster Ordnung für die Zeit-Zeit-Komponente des metrischen Tensors also

$$\tilde{g}_{44} = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right) \qquad (7),$$

das würde aber

$$\tilde{t} = \tau \cdot \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)^{1/2} \qquad (8)$$

bedeuten. Einstein fehlt scheinbar ein Faktor 2, denn die Beziehung (8) ist gerade jene, welche aus der Schwarzschild-Metrik folgt. Doch (8) steht nicht im Widerspruch zu (3). Das wird sofort deutlich, wenn (8) als Taylor-Reihe entwickelt wird[1].

Es liegt also der Sachverhalt vor, dass die Zeit-Zeit-Komponente (7) streng genommen nur eine Näherung repräsentiert, die mit der exakten Beziehung (2), die Einstein in [2] streng[2] herleitet, in Beziehung steht. Zugleich ist die Näherung (7) aber eine exakte Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen. Genau dieser Sachverhalt wirft die im Titel dieses Artikels formulierte Fragestellung auf:

Ist die Allgemeine Relativitätstheorie nur ein genähertes Gravitationsgesetz?

Nach dem beschränkten historischen Wissen des Autors (Retzlaff) hat Einstein das niemals so gesagt. Belegt ist aber, dass Einstein aus verschiedenen Gründen seine Allgemeine Relativitätstheorie nie als letztes Wort in Sachen Gravitationstheorie angesehen hat.

Herleitung der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik aus dem schwachen Äquivalenzprinzip

Wie Einstein 1907 betrachten wir ein beschleunigtes Bezugsystem. Die Beschleunigung interpretieren wird sodann gemäß dem Äquivalenzprinzip als Gravitationsfeld. Wir betrachten aber im Unterschied zu Einstein 1907 und Longair 1991 und 2011 nicht nur die Zeit-Zeit-Komponente, sondern eben auch die Radius-Radius-Komponente des kugelsymmetrischen Vakuumfeldes. So finden wir einerseits die aus dem schwachen Äquivalenzprinzip exakt folgende Metrik (die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik) und andererseits, dass es sich bei der Schwarzschild-Metrik tatsächlich nur um eine Näherung für diese exakte Metrik handelt, die Einstein'schen Feldgleichungen für die Gravitation daher selbst nur eine Näherung repräsentieren können. Diese Sicht wirft dann aber auch die weitergehende Frage auf, ob das schwache und das starke Äquivalenzprinzip überhaupt verträglich sind und ob das starke Äquivalenzprinzip überhaupt in der Natur verwirklicht ist. Es ist durchaus möglich, dass die theoretische Durchführung einer Theorie mit starkem Äquivalenzprinzip auf intrinsische Widersprüche führt, die z.B. in der Voraussage eines Urknalls oder der Voraussage so genannter Schwarzer Löcher ihren physikalischen Ausdruck finden.

Zur Herleitung der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik aus dem schwachen Äquivalenzprinzip beginnen wir mit der Betrachtung der Zeitdilation in einem beschleunigten System – Einsteins berühmtem Fahrstuhl. Zunächst gehen wir von der klassischen Beziehung für die Änderung der Energie eines Systems aus. Die Änderung der Energie dE ist proportional der Kraft, die entlang des Wegelementes dx wirkt.

$$dE = m \cdot a \cdot dx \qquad (9).$$

Da wir uns in der Relativitätstheorie befinden, muss aber die Masse-Energie-Äquivalenz

$$E = m \cdot c^2 \qquad (10)$$

gelten. Aus (10) folgt für das totale Energiedifferential dE die Beziehung:

$$dE = dm \cdot c^2 + m \cdot 2 \cdot c \cdot dc \qquad (11).$$

Auf Grund des Prinzips[3] der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, muss

$$dc = 0 \qquad (12)$$

vorausgesetzt werden. Dadurch entfällt in (11) der zweite Term und es gilt:

---

[1] Wir setzen $x = \frac{\phi}{c^2}$ und entwickeln die Taylor-Reihe für $f(x) = (1+2x)^{1/2}$ bis zur ersten Ordnung:
$f'(x) = \frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = (1+2x)^{-\frac{1}{2}}$, d.h.
$f(0) = 1$ und $f'(0) = 1$, so dass als Taylor-Reihe $f(x) \approx 1 + x$ folgt. Die Rücksubstitution ergibt $f(\phi) = 1 + \frac{\phi}{c^2}$ in voller Übereinstimmung mit Einsteins Resultat (3).

[2] Wird die Beziehung (2) quadriert, dann folgt nämlich $t^2 = \tau^2 \cdot e^{2\frac{a \cdot s}{c^2}} \approx \tau^2 \cdot \left(1 + 2\frac{a \cdot s}{c^2}\right)$ und man liest $g_{44} \approx \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)$ ab.

[3] Dieses Prinzip wird hier zumindest als lokal gültig angenommen.

$$dE = c^2 dm \qquad (13).$$

Setzen wir nun (13) in die Beziehung (9) ein, dann folgt unmittelbar:

$$c^2 dm = m \cdot a \cdot dx \qquad (14).$$

Die Trennung der Variablen führt auf das Integral:

$$c^2 \int_{m_0}^{m_1} \frac{dm}{m} = \int_{x_0}^{x_1} a \cdot dx \qquad (15).$$

Für eine konstante Beschleunigung ergibt sich aus (15) die einfache Beziehung:

$$c^2 \ln \frac{m_1}{m_0} = a \cdot (x_1 - x_0) \qquad (16),$$

bzw. die Exponentialfunktion:

$$\frac{m_1}{m_0} = e^{\frac{a}{c^2}(x_1 - x_0)} \qquad (17).$$

Die Erzeugung der Exponentialfunktion scheint unvermeidlich. Da wir wissen, dass sich die Massenverhältnisse analog den Zeitverhältnissen gemäß

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_0} = \frac{m_1}{m_0} \qquad (18)$$

verhalten [5], gilt die Beziehung (17) in Übereinstimmung mit Einsteins Herleitung entsprechend:

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_0} = e^{\frac{a}{c^2}(x_1 - x_0)} \qquad (19),$$

wenn wir (19) mit (2) vergleichen und die Größen

$$t \equiv \Delta t_1$$
$$\tau \equiv \Delta t_0 \qquad (20)$$
$$s \equiv x_1 - x_0$$

identifizieren[4]. Da wir ebenfalls wissen, dass sich die Längenbeziehungen umgekehrt proportional zum Massenverhältnis verhalten:

$$\frac{\Delta l_0}{\Delta l_1} = \frac{m_1}{m_0} \qquad (21),$$

wäre es bereits jetzt möglich, auf die entsprechende Radius-Radius-Komponente des metrischen Tensors der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik zu schließen. Wir möchten jedoch dem allgemeinen Anliegen der Astronomischen Gesellschaft Magdeburg e.V.[5] entsprechen und eine weitere Herleitungsmöglichkeit angeben.

Herleitung der Radius-Radius-Komponente

Dazu beginnen wir wieder mit der Beziehung (9), d.h. mit $dE = m \cdot a \cdot dx$, doch statt der Masse-Energie-Äquivalenz (10) verwenden wir die relativistische Beziehung

$$E = p \cdot c \qquad (22)$$

und die quantenphysikalische Beziehung

$$p = \frac{h}{\lambda} \qquad (23),$$

worin h das Planck'sche Wirkungsquantum und λ die Wellenlänge sind. Jetzt ist die Herleitung recht analog, wie schon bei der Herleitung von (16). Das totale Differential der Energie ist jetzt:

$$dE = c \cdot dp + p \cdot dc \qquad (24).$$

Mit der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit (12) sowie

$$dp = d\left(h \cdot \lambda^{-1}\right) = -1 \cdot \lambda^{-2} \cdot h \cdot d\lambda$$
$$= -\frac{h}{\lambda^2} d\lambda \qquad (25)$$

folgt durch Einsetzen in (24):

---

[4] Wir haben bewusst die Δt-Bezeichnungen gewählt, um auch symbolisch zwischen Zeitpunkten und Zeitintervallen zu unterscheiden. Das Symbol Δ soll, wie in der Physik üblich, auf den Intervallcharakter der jeweiligen Größe hinweisen.

[5] Die Publikationen der Astronomischen Gesellschaft Magdeburg e.V. unterscheiden sich von sonst üblichen Fachpublikationen vor allem dadurch, dass sie in deutscher Sprache verfasst sind und, dass die Rechnungen, selbst wenn sie mathematisch einfach sind, ausführlich dargestellt werden, um eine große über die Fachgemeinschaft hinausgehende Leserschaft für die mathematisch-physikalische Seite der Physik zu begeistern. Es soll eben nicht im Artikel stehen: „Wie sich zeigen lässt …" und dann wird gar nichts gezeigt, nur behauptet, sondern in den AGM-Publikationen wird es gezeigt und jeder, der es wünscht und sich etwas bemüht, hat die Möglichkeit zum Nachrechnen, kann es einsehen oder gegebenenfalls auf einen Fehler hinweisen. Nur so kann der Leser auch innerlich echte theoretische Forschung miterleben, statt Forschungsergebnisse nur ehrfürchtig nachzuplappern, die er ansonsten gar nicht versteht.

$$dE = -\frac{c \cdot h}{\lambda^2} d\lambda \qquad (26).$$

Mit der Beziehung (26) gehen wir wieder in (12) ein:

$$-\frac{c \cdot h}{\lambda^2} = m \cdot d \cdot dx \qquad (27).$$

In (27) setzen wir noch die Masse-Energie-Äquivalenz ein, um die Masse auf der rechten Seite zu substituieren und finden so

$$-\frac{c \cdot h}{\lambda^2} d\lambda = \frac{E}{c^2} a \cdot dx \qquad (28),$$

substituieren wir noch die Energie mittels (22) und (23), dann finden wir nach etwas Umformungsarbeit:

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = -\frac{a}{c^2} dx \qquad (29).$$

Ein Blick auf (15) rechtfertigt bereits (21), noch bevor man integriert hat. Integrieren wir (29):

$$\int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \lambda^{-1} d\lambda = \int_{x_0}^{x_1} -\frac{a}{c^2} dx \qquad (30),$$

dann finden wir:

$$\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = -\frac{a}{c^2}(x_1 - x_0) \qquad (31)$$

und daraus folgt:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} = e^{-\frac{a}{c^2}(x_1 - x_0)} \qquad (32).$$

So, wie sich aus (19) eine Zeitdilatation für beschleunigte Bewegungen ablesen lässt, aus welcher nach dem Äquivalenzprinzip auf eine Zeitdilatation im Gravitationsfeld geschlossen werden kann, bringt (32) eine Längenkontraktion in beschleunigten Systemen, bzw. im Gravitationsfeld zum Ausdruck. Und so, wie die Zeitdilatation dazu führt, dass im Gravitationsfeld eine Frequenzänderung von Licht entsprechend einer Rotverschiebung gemäß Pound und Rebka [6] gemessen wird, so entspricht (32) einer zugehörigen Änderung der gemessenen Wellenlänge eines Photons.
Einstein hätte auf Grund von (32) bereits 1907 die Beziehung

$$l = l_0 \cdot e^{-\frac{a \cdot s}{c^2}} \qquad (33)$$

hinschreiben können. Unter Anwendung des Äquivalenzprinzips hätte er dann

$$l = l_0 \cdot e^{-\frac{\phi}{c^2}} \qquad (34)$$

gefunden und für ein kugelsymmetrisches Gravitationsfeld wäre die Radius-Radius-Komponente des Metrischen Tensors sofort zu

$$g_{11} = e^{-\frac{2\phi}{c^2}} \qquad (35)$$

mit der Näherung:

$$g_{11} \approx \frac{1}{1 + \frac{2\phi}{c^2}} \qquad (36)$$

bestimmt gewesen.

Schwarzschild-Metrik als Näherung

Der Leser weiß bereits, dass mit (5) die Beziehungen (4) und (36) exakt auf die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik führen:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{e^{-\frac{2M}{r}}} dr^2 + \\ &+ r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2(\vartheta) d\varphi^2 - \qquad (37), \\ &- e^{-\frac{2M}{r}} c^2 dt^2 \end{aligned}$$

einer Metrik, die in [1] zunächst intuitiv im Rahmen eines mathematischen Experimentes konstruiert wurde. Diese Metrik ist hier nun aus fundamentalen und experimentell höchst genau bestätigten physikalischen Prinzipien exakt hergeleitet worden.
Dem gegenüber ergibt sich die Schwarzschild-Metrik exakt als Näherung erster Ordnung aus (37), da

$$e^{-\frac{2M}{r}} \approx 1 - \frac{2M}{r} \qquad (38)$$

gilt, denn die Schwarzschild-Metrik ist

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + \\ &+ r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 d\varphi^2 - \qquad (39). \\ &- \left(1 - \frac{2M}{r}\right) c^2 dt^2 \end{aligned}$$

Der Unterschied der Metriken ist überhaupt nur in der Nähe des Schwarzschild-Radius

$$r_S = 2M \qquad (40)$$

relevant, in großen Entfernungen und damit in schwachen Feldern unterscheiden sich die Metriken praktisch nicht. Doch der

Schwarzschild-Radius impliziert die Möglichkeit der Existenz so genannter Schwarzer Löcher. Der Schwarzschild-Radius ist proportional zur schweren Masse und bringt damit eine Beziehung zum starken Äquivalenzprinzip zum Ausdruck. Dem gegenüber existiert in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik kein Schwarzschild-Radius $r_s > 0$, gleichgültig, wie groß die jeweilige Masse auch ist. Die exakt auf dem Äquivalenzprinzip im Sinne von Einsteins Fahrstuhl-Gedankenexperiment beruhende Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik scheint daher mit dem Äquivalenzprinzip zu brechen, welches der Allgemeinen Relativitätstheorie zugrunde liegt. Oder haben wir hier irgendetwas nicht richtig verstanden?

Einstein'sches, Post-Einstein'sches und klassisches Gravitationsgesetz[6]

Man kann sich die Frage vorlegen, ob bei der Herleitung der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik oder ob in den Betrachtungen von Einstein (1907) und Longair (1991 und 2011) unter der Hand Annahmen getroffen wurden, die auf einen Widerspruch (wie beschrieben) hinauslaufen. Tatsächlich wird ja ϕ stets mit dem Newtonschen Gravitationspotential identifiziert. Ist es vielleicht so, dass das nicht korrekt ist? Wie müsste ϕ beschaffen sein, so dass die exponentielle Form

$$g_{44} = -e^{\frac{2\phi}{r}} \qquad (41)$$

mit der entsprechenden Komponente der Schwarzschild-Metrik

$$g_{44} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \qquad (42)$$

zusammenfällt? Identifizieren wir

$$-e^{\frac{2\phi}{c^2}} \equiv -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \qquad (43),$$

so wird dadurch ein neues klassisches Gravitationspotential definiert, durch Umformung von (43) nach der Größe ϕ, ergibt sich dieses neue Potential:

$$\phi = \frac{c^2}{2}\ln\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \qquad (44).$$

Auch dieses Potential ist nichtlinear von der Gravitationsmasse abhängig, es impliziert daher ebenfalls einen Bruch mit dem starken Äquivalenzprinzip, es führt aber zugleich zur exakten Gültigkeit der Schwarzschild-Metrik auf Basis der exponentiellen Abhängigkeit gemäß (41). Albert Einstein hat die Gültigkeit des starken Äquivalenzprinzips in der Newtonschen Gravitationstheorie zum Anlass genommen, für eine allgemein-relativistische Gravitation die Erfüllung dieses Prinzips zu fordern. Unter anderem gingen die Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie aus der Suche Einsteins nach einer Analogie zu den Poisson-Gleichungen hervor. Jetzt sehen wir, dass auf Grund von (44) die klassische Gravitation mit der starken Äquivalenz brechen müsste, wenn (4) mit der Schwarzschild-Lösung verträglich sein soll. Das ist gewiss ein Widerspruch!

Entwickelt man (44) als Reihe für große Abstände, d.h. für $r > M$, dann findet man:

$$\phi = -\frac{c^2}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}\left(\frac{2M}{r}\right)^i \qquad (45).$$

Brechen wir die Reihe (45) nach der ersten Ordnung ab:

$$\phi^{(1)} = -\frac{c^2}{2}\frac{2M}{r} = -\frac{c^2}{2}\frac{2\cdot\gamma\cdot M_0}{c^2} = \\ = -\frac{\gamma\cdot M_0}{r} = \phi_{Newton} \qquad (46),$$

dann ergibt sich exakt das Newtonsche Gravitationspotential - verblüffend, wie alles zusammenpasst.

Betrachten wir die 2. Ordnung, dann finden wir[7]:

$$\phi^{(2)} = -\frac{c^2}{2}\left(\frac{2M}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{2M}{r}\right)^2\right) = \\ = -\frac{c^2 M}{r} - \frac{c^2}{4}\frac{4M^2}{r^2} = \\ = -\frac{\gamma\cdot M_0}{r} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\gamma\cdot M_0}{r}\right)^2 \qquad (47).$$

[6] Hier ist das kugelsymmetrische Vakuumfeld gemeint.

[7] Im letzten Schritt der Umformung wurde jeweils (6) verwendet.

Terme höherer als der ersten Ordnung enthalten offensichtlich c^2 im Nenner und in höheren Potenzen. Das bedeutet, dass für den Grenzübergang $c \to \infty$ das durch (44) bestimmte Gravitationspotential in das Newtonsche Potential übergeht – erstaunlich, wie wieder alles zusammenpasst. Tatsächlich drückt sich in den Termen höherer Ordnung die Notwendigkeit eines stärkeren Gravitationsfeldes aus, um die Kompatibilität zur Schwarzschild-Lösung herzustellen, denn aufgrund der Exponentialfunktion in (41) wäre die Existenz des Schwarzschild-Radius allein mit dem Newtonschen Potential nicht möglich. In (45) ist also das starke Äquivalenzprinzip in der Weise gebrochen, dass sich die Gravitation bei Massenzuwachs überproportional verstärkt. Eine physikalische Bedeutung kommt dem Potential (44) als quasiklassisches Potential verstanden vermutlich nicht zu, es ist nur ein Artefakt unserer Konstruktion das passend zu machen, was nicht zusammen passt. Aber gleichgültig, ob wir dem Potential (44) eine physikalische Bedeutung zuweisen oder nicht, in letzter Instanz scheinen schwaches und starkes Äquivalenzprinzip in einem spezifischen Sinne widersprüchliche Prinzipien.
Um die damit verbundenen Fragen aufzuklären, müssen wir uns mit den Äquivalenzprinzipien in der Newtonschen Gravitationstheorie und in den relativistischen Gravitationstheorien genauer befassen.

Äquivalenzprinzipien bei Newton, Einstein und in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

In der Newtonschen Gravitationsphysik kommt die Masse in drei begrifflich unterschiedlichen Bedeutungen vor. Zunächst als so genannte träge Masse m_T, d.h. als Widerstand gegen eine Beschleunigung erscheint sie in Newtons Kraftgesetz:

$$\vec{K} = m_T \vec{a} \qquad (48).$$

In einem durch die Feldstärke $\vec{G}$ gegebenen Gravitationsfeld wird die Gravitationskraft durch die Beziehung

$$\vec{F}_G = m_p \vec{G} \qquad (49)$$

beschrieben. Dabei ist m_p die so genannte passive Gravitationsmasse, sie beschreibt die Eigenschaft eines Probekörpers, auf ein gegebenes Gravitationsfeld zu reagieren. Gemäß der Galileischen Fallexperimente werden Körper auch mit unterschiedlichen passiven schweren Massen, die sich allein im Gravitationsfeld bewegen, in gleicher Weise beschleunigt. Setzt man (48) und (49) gleich

$$m_T \vec{a} = m_p \vec{G} \qquad (50),$$

dann besagt Galileis Beobachtung:

$$\vec{a} = \vec{G} \qquad (51)$$

und das unterstellt:

$$m_T = m_p \qquad (52).$$

Die Beziehung (52) ist die erste und einfachste Fassung des so genannten schwachen Äquivalenzprinzips von Trägheit und Schwere. Die Beziehung (51) besagt, dass das Gravitationsfeld ein universelles Beschleunigungsfeld ist.

Kommen wir nun zum starken Äquivalenzprinzip, wie es sich in der Newtonschen Gravitationstheorie darstellt. Die Feldstärke $\vec{G}$ des Gravitationsfeldes ist als Gradient des Newtonschen Gravitationspotentials gegeben:

$$\vec{G} = -grad(\phi) = -\frac{Q_G}{r^3}\vec{r} \qquad (53).$$

In (53) ist Q_G die Gravitationsladung. Sie fungiert als Quelle des Gravitationsfeldes[8]. Wir haben absichtlich diese von der üblichen Schreibweise abweichende Bezeichnung gewählt, um auch optisch die begrifflich unterschiedlichen Größen zu trennen. Wir zeigen nun, dass das so genannte Starke Äquivalenzprinzip sich aus dem 3. Newtonschen Axiom, dem Gegenwirkungsaxiom, herleitet. Dazu betrachten wir den wechselseitigen gravitativen Einfluss zweier Körper (A und B) aufeinander. Da die gravitativen Wechselwirkungskräfte der beiden Körper nur entlang ihrer Verbindungslinie wirksam werden, ist eine vektorielle Betrachtung

[8] Potentialtheoretisch ist sie eigentlich eine Feldsenke. Das ist hier aber unwesentlich.

unnötig und es ist ausreichend, wenn wir uns auf die Beträge der wirksamen Kräfte beschränken. Da keine äußeren Kräfte auf die Körper A und B einwirken sollen, muss die Summe der Kräfte Null sein, d.h. die Kraft, welche vom Körper A auf den Körper B wirkt, wir nennen sie $\vec{K}_{AB}$, muss entgegengesetzt gleich der Kraft sein, welche vom Körper B auf den Körper A wirkt, d.h. es gilt:

$$\vec{K}_{AB} + \vec{K}_{BA} = 0 \qquad (54).$$

Für die Beträge muss daher

$$K_{AB} = K_{BA} \qquad (56)$$

gelten. Da es sich um Gravitationskräfte handeln soll, gilt (53) in der Betragsform:

$$K_{AB} = m_p^B \frac{Q_G^A}{r^2}$$
$$K_{BA} = m_p^A \frac{Q_G^B}{r^2} \qquad (57).$$

Mit (57) führt (56) auf die Gleichung:

$$m_p^B \frac{Q_G^A}{r^2} = m_p^A \frac{Q_G^B}{r^2} \qquad (58).$$

Durch Kürzen von r^2 und Umformung erhalten wir die einfache Verhältnisgleichung:

$$\frac{Q_G^A}{m_p^A} = \frac{Q_G^B}{m_p^B} \qquad (59).$$

Dieser Gleichung (59) ist direkt abzulesen, dass das Verhältnis zwischen Gravitationsladung und passiver schwerer Masse eine Konstante sein muss. In anderen Worten, die Gravitationsladung ist proportional zur passiven schweren Masse. Diese Proportionalität kann in der Beziehung

$$Q_G = \gamma \cdot m_s \qquad (60)$$

unmittelbar zum Ausdruck gebracht werden, wobei γ dann so gewählt werden kann, dass

$$m_s = m_p \qquad (61)$$

gilt, d.h. die aktive schwere Masse m_s ist gleich der passiven schweren Masse m_p. Die Beziehung (61) bringt das starke Äquivalenzprinzip unmittelbar zum Ausdruck.
Auf Grund des schwachen und des starken Äquivalenzprinzips kann die Masse

$$m = m_T = m_p = m_s \qquad (62)$$

beliebig, bzw. je nach Aspekt als träge, passive oder aktive schwere Masse interpretiert werden.
Mit (60) und (62) erhält (53) die Form

$$\vec{G} = -\frac{\gamma \cdot m}{r^3}\vec{r} \qquad (63).$$

Die Feldstärke $\vec{G}$ ist bei gegebenem Abstand direkt der felderzeugenden Masse proportional, und das besagt, dass die Gravitation beliebig anwachsen kann.
Es sei hier bereits angemerkt, dass es von erheblicher theoretischer Bedeutung ist, dass das starke Äquivalenzprinzip eine direkte Folge des 3. Newtonschen Axiomes ist, denn das Gegenwirkungsprinzip setzt die Fernwirkung voraus. Das 3. Newtonsche Axiom ist daher in einer relativistischen Feldtheorie gebrochen – würde man beispielsweise die Gravitation der Sonnen zu einem bestimmten Zeitpunkt abschalten, so würde die Erde erst mit einer Verspätung von 8 Minuten die Wirkung davon „spüren“. Eine Verletzung des starken Äquivalenzprinzips ist mit einer relativistischen Feldphysik also durchaus verträglich und muss nicht zwingend in die Relativistik übernommen werden. Auch experimentell ist das Prinzip nur im Rahmen einer sehr geringen Genauigkeit gesichert (Cavandish-Experimente), darum ist die Gravitationskonstante die am ungenausten bekannte Naturkonstante[7]. Dem gegenüber ist das schwache Äquivalenzprinzip hoch genau bestätigt und für eine relativistische Feldphysik im Sinne einer metrischen Theorie der Gravitation auch fundamental unverzichtbar.
Wir kommen nun zu den Äquivalenzprinzipien in der Einstein’schen Gravitationstheorie, wobei wir [8] referieren, einzelne Sätze oder Passagen wörtlich übernehmen, ohne das extra zu kennzeichnen. Wir empfehlen die sehr ausführliche und tiefgehende Abhandlung [8] nachzulesen.
Bevor man vertieft über das Äquivalenzprinzip von Trägheit und Schwere in einer relativistischen, d.h. in einer metrischen Theorie der Gravitation nachdenkt, muss man sich daran erinnern, dass die Begriffe träge Masse und schwere Masse Begriffe aus der nichtrelativistischen Mechanik Newtons sind.

Es ist daher nicht automatisch zu erwarten, dass sich diese Begriffe auf Teilchen anwenden lassen, die sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen [8]. So erklärt beispielsweise die Newtonsche Theorie die Rotverschiebung eines Teilchens, z.B. eines Lichtquants, welches sich von einem Gravitationszentrum entfernt, als Verlust an kinetischer Energie, während in den metrischen Theorien der Gravitation die Frequenzverschiebung (Rotverschiebung) aus einem ortsabhängigen Uhrengang ohne Rückgriff auf den Terminus „schwere Masse“ deduziert wird und die Lichtablenkung im Gravitationsfeld hat nach der Newtonschen Theorie nur den halben Wert des tatsächlich gemessenen Betrages. In metrischen Theorien der Gravitation ist im statischen Gravitationsfeld die kinetische Energie eine Konstante und eine potentielle Energie gibt es in relativistischen Theorien der Gravitation nicht[9] [8]. Der aus metrischen Theorien berechnete Betrag der Lichtablenkung hängt von der konkreten Metrik ab und diese ist eine Folge der jeweiligen Feldgleichungen sowie der Grenzbedingungen[10,11].

Das Äquivalenzprinzip bedeutet nun, dass ein Beobachter eines beschleunigten Massenpunktes nicht entscheiden kann, ob diese Beschleunigung von Trägheitskräften oder von einem Gravitationsfeld hervorgerufen wird. Diese Nichtunterscheidbarkeit von Trägheit und Schwere gilt zwar nur lokal, sie reicht aber aus, um zu verstehen, dass die Schwerkraft mit denselben Mitteln beschrieben werden muss, wie die Trägheit in beschleunigten Bezugssystemen, nämlich durch eine Metrik, verschieden von der des Minkowski-Raumes, nämlich durch das Linienelement:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \qquad (64),$$

[9] Wir verwenden die Begriffe „metrische Theorie“ und „relativistische Theorie“ der Gravitation als Synonyme.

[10] Festlegung der Integrationskonstanten.

[11] Die Lichtablenkung ist somit eine Bedingung für die Feldgleichungen und keine Bestätigung des Äquivalenzprinzips!

wobei die metrischen Tensorkomponenten g_{ik} durch die Feldgleichungen, die Grenz- und Anfangsbedingungen bestimmt werden.

Der metrische Tensor ist das relativistische Analogon zum Gravitationspotential, seine Ableitungen bilden die Analogie zur Feldstärke. Es ist stets möglich, ein Koordinatensystem so zu wählen, dass an jedem Punkt des Raumes[12]

$$g_{ik} = \eta_{ik} + \\ + \frac{1}{2} g_{ik,rs} \left(x^r - x_P^s\right)\left(x^\nu - x_P^s\right) + \qquad (65) \\ + \ldots$$

gilt. In (65) sind die Größen η_{ik} die metrischen Tensorkomponenten des ebenen Minkowski-Raumes der Speziellen Relativitätstheorie und die Größen $g_{ik,rs}$ kennzeichnen die partiellen Ableitungen der g_{ik} nach den Koordinaten x^r und x^s am Punkte P. Alle Indizes durchlaufen die Nummern von 1 bis 4.

Die Beziehung (65) ist eine geometrische Fassung des Äquivalenzprinzips. Sie beschreibt das Feld in einem lokalen Inertialsystem, wobei im Punkte P keine Kräfte auftreten, entsprechend Einsteins frei fallendem Fahrstuhl. Ein Raum wäre gravitationsfrei, wenn man ein entsprechendes Koordinatensystem für den ganzen Raum, also nicht nur lokal, einführen könnte.

Die relativistische Fassung des Äquivalenzprinzips ist das Geodätenprinzip, d.h. kraftfreie strukturlose Massenpunkte bewegen sich im Riemannschen Raum auf Geodäten entsprechend:

$$\frac{d^2 x^m}{d\lambda^2} + \Gamma_{ik}^m \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} = 0 \qquad (66),$$

mit den Christoffel-Symbolen:

$$\Gamma_{ik}^m = \frac{1}{2} g^{mn} \left(g_{in,k} + g_{kn,i} - g_{ik,n}\right) \qquad (67),$$

wobei (65) eine Folge der dynamischen Gleichung

$$T_{;k}^{ik} = T_{,k}^{ik} + \Gamma_{lk}^i T^{lk} + \Gamma_{lk}^k T^{il} = 0 \qquad (68)$$

[12] Der Kürze halber wollen wir im Folgenden unter Raum stets die 4-dimensionale Raum-Zeit verstehen.

ist, wenn T^{ik} die Komponenten des Energie-Impulstensors bezeichnet. Das Verschwinden der kovarianten Divergenz $T^{ik}_{;k}=0$ gemäß (68) bedeutet die lokale Gültigkeit des Energie-Impulserhaltungssatz der Speziellen Relativitätstheorie. Die nächste Verallgemeinerung des Äquivalenzprinzips ist daher die lokale Gültigkeit der speziell-relativistischen Feldgleichungen im Koordinatensystem (65) für alle nicht-gravitativen Felder, d.h. das Aufschreiben der speziell-relativistischen Feldgleichungen im Koordinatensystem (65) bewirkt über die Kovariantschreibung[13] die Gültigkeit der Feldgleichungen in allen Koordinatensystemen und dadurch auch in allen Bezugssystemen. Die Kovariantschreibung der kanonischen Form der Feldgleichung der nichtgravitativen Felder als Vorschrift für die Errechnung der Wirkung des Schwerefeldes auf diese Felder ist ein vorläufiger Höhepunkt in der Abstraktion des Äquivalenzprinzips und wird im Allgemeinen als das schwache Äquivalenzprinzip bezeichnet[8]. Die Wirkung der Gravitation auf die nichtgravitativen Felder kommt auf diese Weise ausschließlich über die in den kovariant geschriebenen Feldgleichungen enthaltenen metrischen Tensorkomponenten und deren Derivierten hinein. Man bezeichnet diesen Sachverhalt auch als das Prinzip der minimalen Kopplung. Zugleich drückt sich darin die Universalität des Einflusses der Gravitation auf alle raum-zeitlichen Wechselwirkungen aus[14].

[13] Kovariantschreibung der Feldgleichungen bedeutet die Ersetzung partieller Ableitungen durch kovariante Ableitungen, d.h. die Substitution: $_{,k}\rightarrow{}_{;k}$.

[14] Aus dieser Universalität wird in der Literatur oft der falsche Schluss gezogen, dass sich die Gravitation in der Allgemeinen Relativitätstheorie nicht abschirmen ließe. Diese Folgerung ist jedoch irreführend, da nach der Allgemeinen Relativitätstheorie auch repulsive gravitative Wirkungen, z.B. um geladene Teilchen, existieren, die zumindest im Nahfeld die gravitative Attraktion dominieren. Es sei in diesem Zusammenhang an die Reissner-Nordström-Metrik erinnert [9].

In der Einstein'schen Allgemeinen Relativitätstheorie gilt zusätzlich das starke Äquivalenzprinzip. Einstein hat postuliert, dass in einem frei fallenden Bezugssystem (Schwerpunkt des frei fallenden Fahrstuhls) mit der Metrik (65) alle äußeren Gravitationseffekte verschwinden. Das bedeutet, dass die Metrik die einzige Größe ist, die das Gravitationsfeld enthält und dass die Raumkrümmung lokal nicht in die kanonischen Gleichungen für die nichtgravitativen Felder eingeht – soweit die Kurzfassung von [8].

Auf Grund der referierten relativistischen Fassungen der Begriffe schwaches und starkes Äquivalenzprinzip bestimmt also das schwache Äquivalenzprinzip nicht die Feldgleichungen. Die konkrete Form der Feldgleichungen wird erst durch das starke Äquivalenzprinzip festgeschrieben. Ist das starke Äquivalenzprinzip in der Natur realisiert, ist die Einstein'sche Allgemeine Relativitätstheorie die einzig mögliche Gravitationstheorie.

Die Rechnungen von Einstein in [2], Longair in [3] und Retzlaff in [1] haben gezeigt, dass unter einfachsten Voraussetzungen eine Metrik aus Annahmen deduzierbar ist, die das schwache Äquivalenzprinzip und die lokale Konstanz der Lichtgeschwindigkeit voraussetzen und in definierter Weise mit dem Newtonschen Gravitationspotential in Beziehung stehen. Speziell für eine Punktmasse ergibt sich die Metrik (37), die als Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik bezeichnet wird. Diese Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik enthält die berühmte äußere Schwarzschild-Metrik als Näherung und während in der Schwarzschild-Metrik so genannte Schwarze Löcher möglich sind, kann in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik ein solches kritisches Objekt nicht existieren.

Aktuell sind Feldgleichungen, aus denen sich die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik herleiten lässt, nicht bekannt. Während auch in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik das schwache Äquivalenzprinzip so wie auch in der Einstein'schen Allgemeinen Relativitätstheorie erfüllt ist, ist das starke Äquivalenzprinzip verletzt. Dieser Buch mit dem starken

Äquivalenzprinzips muss sich in einer entsprechenden Post-Einstein'schen-Gravitationstheorie, aus der die Post-Einstein-Metrik herleitbar ist, so darstellen, dass in einem frei fallenden Labor auch lokal prinzipiell experimentell entscheidbar ist, ob ein äußeres Gravitationsfeld existiert. Da die Unmöglichkeit des Auftretens Schwarzer Löcher in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik ein Prinzip der Selbstabschirmbarkeit der Gravitation zum Ausdruck bringt, müssen klassische Cavandish-Experimente in einem im äußeren Gravitationsfeld frei fallenden Labor ortsabhängige Gravitationskonstanten[15] ergeben, wobei die auf diese Weise ermittelten Gravitationskonstanten umso kleiner werden, je stärker das äußere Feld ist, d.h. je stärker die Krümmung der Raum-Zeit ist.

Wir haben auf Grund von [8] gelernt, dass das schwache Äquivalenzprinzip die Feldgleichungen nicht festlegt und dadurch auch nicht ausreichend sein kann, um eine konkrete Metrik zu bestimmen. Da die Exponentialfunktion in der Beziehung (2) allein auf einer reinen Beschleunigung beruht, kann dahingegen argumentiert werden, dass die konkrete Metrik dadurch festgelegt wird, dass man sich in (2) (oder in anderen entsprechenden Beziehungen) auf das Newtonsche Gravitationspotential bezieht. Doch das schwache Äquivalenzprinzip lässt auch eine Umkehrung der Betrachtungen zu, wenn nämlich die Beschleunigung als Ausdruck eines Gravitationsfeldes betrachtet wird, lässt sich der Schluss ziehen, dass der Ausgang von Cavandish-Experimenten selbst von der Stärke der Beschleunigung abhängt, denen das System unterworfen ist, in welchem die Messungen gemacht werden. Man kann das als einen weiteren Post-Einstein-Effekt ansehen. Kann ein solcher Effekt nachgewiesen werden, so wäre das ein Argument für die Selbstabschirmung der Schwerkraft und ein direkter Nachweis für den Bruch des starken Äquivalenzprinzips und somit ein Nachweis, dass es sich bei den Einstein'schen Feldgleichungen um ein genähertes Gravitationsgesetz handelt.

Der scheinbare Widerspruch zwischen schwachem und starkem Äquivalenzprinzip, wie ihn die Untersuchungen von Einstein, Longair und Retzlaff nahelegen, beruht darauf, dass diese Begriffe in der klassischen und in der relativistischen Physik nicht exakt deckungsgleich sind. In der relativistischen Physik kommt die Verträglichkeit der Prinzipien in Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie unmittelbar zum Ausdruck, wobei in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik das starke Äquivalenzprinzip tatsächlich verletzt ist.

Quellen

[1] Retzlaff, Klaus, „Einstein- und Post-Einstein-Effekte im Zentralfeld“, epubli, 2017
[2] Einstein, Albert, „Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen“, Zeitschrift für Radioaktivität und Elektronik, 1907
[3] Longair, Malcolm Sim, „Theoretische Konzepte der Physik“, Springer Verlag 1991 und 2011
[4] Lanczos, Cornelius, „Tetraden-Formalismus und definite Raum-Zeit-Struktur“, Vortrag auf dem Einstein-Symposium 1965, Wiederabdruck Akademie-Verlag Berlin 1979
[5] Retzlaff, Klaus, „Trägheitsinduktion und Relativität der Zeit“, 2013, siehe www.astronomie-magdeburg.de
[6] R.V. Pound und G.A. Rebka, „Gravitational Red-Shift in nuclear resonance“, Physical Review Letters, Vol. 3, Number 9., 1. November 1959
[7] Retzlaff, Klaus, „Die Ungenauigkeit der Gravitationskonstante und die Abschätzung Dunkler Materie in der Sonnenumgebung – kritische Anmerkung“, 2017, siehe www.astronomie-magdeburg.de
[8] Treder, Hans-Jürgen, „Gravitationstheorie und Äquivalenzprinzip“, Akademie - Verlag Berlin, 1971
[9] von Laue, Max, „Die Relativitätstheorie“, zweiter Band, Verlag Frieder. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1956

[15] Der Begriff einer „Gravitationskonstante“ passt natürlich jetzt nicht in ein Szenario, in welchem der gemessene Wert von physikalischen Bedingungen abhängig ist.