

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff
8.9.2018



Zusammenfassung: Es werden auf Basis des Metrischen Tensors der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik der Ricci-Tensor, die skalare Krümmung sowie der Einstein-Tensor berechnet und diskutiert. Im Ergebnis kann ein nur in schwachen Gravitationsfeldern vorhandener Dunkle-Materie-Effekt¹ als Folge der Eigenschaft der Metrik nachgewiesen werden.

Zunächst werden die Komponenten des Metrischen Tensors der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik angegeben. Aus ihnen werden die ersten Derivierten abgeleitet. Diese Derivierten werden benutzt, um die Christoffel-Symbole und deren Derivierte zu bestimmen. Kurze Rechnungen erfolgen im Haupttext, lange Rechnungen stehen in der Anlage. Wie in allen Artikeln sind die Rechnungen sehr ausführlich dargestellt, um jedem Interessierten auch die Mathematik näher zu bringen und das Nachrechnen zu erleichtern. Im Anhang sind auch Kontrollrechnungen zu finden, so werden die genannten Tensoren auch für die Schwarzschild-Metrik der Allgemeinen Relativitätstheorie berechnet, die im Ergebnis selbstverständlich dem Einstein-Vakuum entsprechend null sind. Dem gegenüber verschwinden diese Tensoren² für die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik nicht. Die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik repräsentiert kein Einstein-Vakuum, sie ist aber auch nicht materieinduziert, vielmehr verweist sie auf tiefergehende intrinsische Eigenschaften der leeren Raum-Zeit, in der das starke Äquivalenzprinzip der Allgemeinen Relativitätstheorie verletzt ist.

1. Herleitungen

Komponenten des metrischen Tensors der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik ist erstmals in [1] konstruiert, diskutiert und publiziert worden. Eine vollständige Herleitung aus ersten Prinzipien ist in [2] zu finden. Die kugelsymmetrische Metrik für den ruhenden unendlich weit entfernten Beobachter hat die Form:

$$ds^2 = e^{\frac{2M}{r}} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2(\vartheta) d\varphi^2 - e^{-\frac{2M}{r}} c^2 dt^2 \quad (1)$$

mit dem Gravitationsradius³

$$M = \frac{\gamma \cdot M_0}{c^2} \quad (2)$$

und es sind weiter die Kugelkoordinaten definiert als:

r Radius	→	Koordinatenindex 1
ϑ Breitengrad	→	Koordinatenindex 2
φ Längengrad	→	Koordinatenindex 3

sowie

¹ Verletzt eine Metrik die Vakuumgleichung, muss sie zwangsläufig irgendeine Materiedichte suggerieren, wenn man sie im Sinnen der Einstein'schen Gleichungen interpretiert, wobei es sich auch um negative Massendichten oder exotische Materieformen handeln kann. Darum ist dieses Ergebnis nicht spektakulär und drückt nur die Inkompatibilität zur Allgemeinen Relativitätstheorie aus. Bemerkenswert scheint, dass dieser Effekt in schwachen Feldern auftritt, wie man sie im intergalaktischen Raum findet, nicht jedoch in starken Feldern. Tatsächlich ist diese „Dunkle Materie“ fiktiv. Sie hat keine dynamische Bedeutung.

² Auch der Krümmungsskalar wird unter diesen Begriff subsummiert, da er ein Tensor nullter Stufe ist.

³ γ : Newtonsche Gravitationskonstante, M_0 : Zentralmasse in kg, c^2 : Quadrat der Vakuumlichtgeschwindigkeit

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff
8.9.2018



t Koordinatenzeit \rightarrow Koordinatenindex 4.

Der aus (1) ablesbare metrische Tensor ist durch die Matrix

$$\langle g \rangle = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{2M}{r}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2(\vartheta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-\frac{2M}{r}} \end{pmatrix} \quad (3)$$

gegeben. Da die Metrik im Hauptachsensystem gegeben ist, gilt für $r > 0$ und $i \neq k$ stets:

$$\begin{aligned} g_{ik} &= 0 \\ g_{kk} &\neq 0 \end{aligned} \quad (4).$$

Die Metrik ist für $r > 0$ stets regulär. Bei $r = 0$ existiert eine kaustische Singularität, die bei geeigneter Koordinatenwahl beseitigt werden kann. Die Raum-Zeit selbst ist auch bei $r = 0$ regulär. Wir haben weiter das Glück, dass von den 10 unabhängigen Komponenten des Metrischen Tensors nur 4 Stück von Null verschieden sind. Außerdem sind diese Komponenten nicht von allen Koordinaten abhängig. Beides erspart uns einen erheblichen Aufwand bei den folgenden Berechnungen zur Bestimmung des Einstein-Tensors.

Derivierte des Metrischen Tensors

Für die Berechnungen werden die partiellen Ableitungen aller Tensorkomponenten nach den Koordinaten benötigt. Theoretisch wären von 16 Komponenten Ableitungen nach jeweils 4 Koordinaten zu bilden, das wären $4 \cdot 16 = 64$ Ableitungen. Auf Grund der Symmetrie des Metrischen Tensors

$$g_{ik} = g_{ki} \quad (5)$$

verbleiben nur 10 unabhängige Tensorkomponenten und es wären demnach $10 \cdot 4 = 40$ Ableitungen zu bilden, doch tatsächlich reduziert sich der Ableitungsaufwand erheblich stärker, wie man leicht sieht, da wir nur die von null verschiedenen Ableitungen berechnen müssen:

$$g_{11,1} = \frac{\partial}{\partial r} g_{11} = \frac{\partial}{\partial r} e^{\frac{2M}{r}} = -\frac{2M}{r^2} e^{\frac{2M}{r}} \quad (6),$$

$$g_{22,1} = \frac{\partial}{\partial r} g_{22} = 2r \quad (7),$$

$$g_{33,1} = \frac{\partial}{\partial r} g_{33} = 2r \sin^2(\vartheta) \quad (8),$$

$$g_{33,2} = \frac{\partial}{\partial \vartheta} g_{33} = 2r^2 \sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \quad (9),$$

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff

8.9.2018



$$g_{44,1} = \frac{\partial}{\partial r} g_{44} = \frac{2M}{r^2} e^{-\frac{2M}{r}} \quad (10).$$

Insgesamt sind also nur 5 Ableitungen relevant.

Christoffel-Symbole

Die Definition der Christoffel-Symbole

$$\Gamma_{ik}^l = \frac{1}{2} g^{lm} (g_{im,k} + g_{km,i} - g_{ik,m}) \quad (11)$$

liefert uns unter Nutzung von (6) bis (10) die von null verschiedenen Symbole (vergleiche [1]):

$$\Gamma_{11}^1 = -\frac{M}{r^2}, \Gamma_{22}^1 = -re^{-\frac{2M}{r}}, \Gamma_{33}^1 = -r \sin^2(\vartheta) e^{-\frac{2M}{r}}, \Gamma_{44}^1 = \frac{M}{r^2} e^{-\frac{4M}{r}} \quad (12),$$

$$\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r}, \Gamma_{33}^2 = -\sin(\vartheta) \cos(\vartheta) \quad (13),$$

$$\Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r}, \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot(\vartheta) \quad (14),$$

$$\Gamma_{14}^4 = \Gamma_{41}^4 = \frac{M}{r^2} \quad (15).$$

Derivierte der Christoffel-Symbole

Es werden auch hier nur die von null verschiedenen Ableitungen gebildet:

$$\Gamma_{11,1}^1 = \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{11}^1 = +\frac{2M}{r^3} \quad (16),$$

$$\Gamma_{22,1}^1 = \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{22}^1 = -\left(1 + \frac{2M}{r}\right) \cdot e^{-\frac{2M}{r}} \quad (17),$$

$$\Gamma_{33,1}^1 = \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{33}^1 = -\left(1 + \frac{2M}{r}\right) \cdot \sin^2(\vartheta) \cdot e^{-\frac{2M}{r}} \quad (18),$$

$$\Gamma_{33,2}^1 = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Gamma_{33}^1 = -2 \cdot r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) \cdot e^{-\frac{2M}{r}} \quad (19),$$

$$\Gamma_{44,1}^1 = \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{44}^1 = +\left(\frac{4M^2}{r^4} - \frac{2M}{r^3}\right) \cdot e^{-\frac{4M}{r}} \quad (20),$$

$$\Gamma_{12,1}^2 = \Gamma_{21,1}^2 = \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{12}^2 = -\frac{1}{r^2} \quad (21),$$

$$\Gamma_{33,2}^2 = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Gamma_{33}^2 = \sin^2(\vartheta) - \cos^2(\vartheta) \quad (22),$$

$$\Gamma_{13,1}^3 = \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{13}^3 = -\frac{1}{r^2} \quad (23),$$

$$\Gamma_{23,2}^3 = \Gamma_{32,2}^3 = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \Gamma_{23}^3 = -1 - \cot^2(\vartheta) \quad (24),$$

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff

8.9.2018



$$\Gamma_{14,1}^4 = \Gamma_{4,1,1}^4 = \frac{\partial}{\partial r} \Gamma_{14}^4 = -\frac{2M}{r^3} \quad (25).$$

Das sind insgesamt 10 derivierte Größen.

Ricci-Tensor

Der Ricci-Tensor entsteht als Verjüngung des Riemann-Tensors und kann durch die Christoffel-Symbole und ihre Derivierten ausgedrückt werden:

$$R_{ik} = R_{imk}^m = \Gamma_{ik,m}^m - \Gamma_{im,k}^m + \Gamma_{nm}^m \Gamma_{ik}^n - \Gamma_{nk}^m \Gamma_{im}^n \quad (26).$$

Es sind bereits alle Bestimmungsstücke gegeben, um den Ricci-Tensor auszurechnen. Wir schreiben jetzt die Beziehung (26) ausführlich auf, um uns im nächsten Schritt zu überlegen, welche der Terme gestrichen werden können, weil diese null sind oder sich wegheben. Der ausführlich geschriebene Ricci-Tensor hat die Form

$$\begin{aligned} R_{ik} = & \Gamma_{ik,1}^1 + \Gamma_{ik,2}^2 + \Gamma_{ik,3}^3 + \Gamma_{ik,4}^4 - \Gamma_{i1,k}^1 - \Gamma_{i2,k}^2 - \Gamma_{i3,k}^3 - \Gamma_{i4,k}^4 + \\ & + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{ik}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{ik}^1 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{ik}^1 + \Gamma_{14}^4 \Gamma_{ik}^1 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{ik}^2 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{ik}^2 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{ik}^2 + \Gamma_{24}^4 \Gamma_{ik}^2 + \\ & + \Gamma_{31}^1 \Gamma_{ik}^3 + \Gamma_{32}^2 \Gamma_{ik}^3 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{ik}^3 + \Gamma_{34}^4 \Gamma_{ik}^3 + \Gamma_{41}^1 \Gamma_{ik}^4 + \Gamma_{42}^2 \Gamma_{ik}^4 + \Gamma_{43}^3 \Gamma_{ik}^4 + \Gamma_{44}^4 \Gamma_{ik}^4 - \\ & - \Gamma_{1k}^1 \Gamma_{i1}^1 - \Gamma_{1k}^2 \Gamma_{i2}^1 - \Gamma_{1k}^3 \Gamma_{i3}^1 - \Gamma_{1k}^4 \Gamma_{i4}^1 - \Gamma_{2k}^1 \Gamma_{i1}^2 - \Gamma_{2k}^2 \Gamma_{i2}^2 - \Gamma_{2k}^3 \Gamma_{i3}^2 - \Gamma_{2k}^4 \Gamma_{i4}^2 - \\ & - \Gamma_{3k}^1 \Gamma_{i1}^3 - \Gamma_{3k}^2 \Gamma_{i2}^3 - \Gamma_{3k}^3 \Gamma_{i3}^3 - \Gamma_{3k}^4 \Gamma_{i4}^3 - \Gamma_{4k}^1 \Gamma_{i1}^4 - \Gamma_{4k}^2 \Gamma_{i2}^4 - \Gamma_{4k}^3 \Gamma_{i3}^4 - \Gamma_{4k}^4 \Gamma_{i4}^4 \end{aligned} \quad (27).$$

Es entstehen hier sehr unübersichtliche Ausdrücke, wie man exemplarisch an der Komponente

$$\begin{aligned} R_{11} = & \Gamma_{11,1}^1 + \Gamma_{11,2}^2 + \Gamma_{11,3}^3 + \Gamma_{11,4}^4 - \Gamma_{11,1}^1 - \Gamma_{12,1}^2 - \Gamma_{13,1}^3 - \Gamma_{14,1}^4 + \\ & + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{13}^3 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{14}^4 \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{21}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{22}^2 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{23}^3 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{24}^4 \Gamma_{11}^2 + \\ & + \Gamma_{31}^1 \Gamma_{11}^3 + \Gamma_{32}^2 \Gamma_{11}^3 + \Gamma_{33}^3 \Gamma_{11}^3 + \Gamma_{34}^4 \Gamma_{11}^3 + \Gamma_{41}^1 \Gamma_{11}^4 + \Gamma_{42}^2 \Gamma_{11}^4 + \Gamma_{43}^3 \Gamma_{11}^4 + \Gamma_{44}^4 \Gamma_{11}^4 - \\ & - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^3 \Gamma_{13}^1 - \Gamma_{11}^4 \Gamma_{14}^1 - \Gamma_{21}^1 \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 - \Gamma_{21}^3 \Gamma_{13}^2 - \Gamma_{21}^4 \Gamma_{14}^2 - \\ & - \Gamma_{31}^1 \Gamma_{11}^3 - \Gamma_{31}^2 \Gamma_{12}^3 - \Gamma_{31}^3 \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{31}^4 \Gamma_{14}^3 - \Gamma_{41}^1 \Gamma_{11}^4 - \Gamma_{41}^2 \Gamma_{12}^4 - \Gamma_{41}^3 \Gamma_{13}^4 - \Gamma_{41}^4 \Gamma_{14}^4 \end{aligned} \quad (28)$$

feststellen kann. Doch einerseits ist ein großer Teil der Terme null und ein Teil der Terme hebt sich weg⁴. Eine ausführliche Rechnung liefert

$$R_{11} = -\Gamma_{12,1}^2 - \Gamma_{13,1}^3 - \Gamma_{14,1}^4 + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{14}^4) - (\Gamma_{12}^2)^2 - (\Gamma_{13}^3)^2 - (\Gamma_{14}^4)^2 \quad (29),$$

$$R_{12} = \Gamma_{23}^3 (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{13}^3) = 0 \quad (30),$$

$$R_{21} = \Gamma_{23}^3 (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{13}^3) = 0 \quad (31),$$

$$R_{22} = \Gamma_{22,1}^1 - \Gamma_{23,2}^3 + \Gamma_{22}^1 (\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{13}^3 + \Gamma_{14}^4 - \Gamma_{12}^2) - (\Gamma_{23}^3)^2 \quad (32),$$

⁴ Die vollständige Liste aller Terme ist im Anhang zu finden.

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff

8.9.2018



$$R_{33} = \Gamma_{33,1}^1 + \Gamma_{33,2}^2 + \Gamma_{33}^3(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{14}^4 - \Gamma_{13}^3) - \Gamma_{33}^2 \Gamma_{23}^3 \quad (33),$$

$$R_{44} = \Gamma_{44,1}^1 + \Gamma_{44}^1(\Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3 - \Gamma_{14}^4) \quad (34)$$

für die Komponenten $R_{ik} \neq 0$, wobei wir die Symmetrie $\Gamma_{ik}^l = \Gamma_{ki}^l$ berücksichtigt haben. Auf Grund der Identität der Christoffel-Symbole $\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}$ folgt für die scheinbar einzigen überlebenden

Nichtdiagonalelemente des Ricci-Tensors $R_{12} = R_{21} = 0$.

Unter Benutzung der Beziehungen (16) bis (25) ergibt sich für die konkrete Form des Ricci-Tensors⁵:

$$R_{11} = -2 \frac{M^2}{r^4} \quad (35),$$

$$R_{22} = -\left(1 + \frac{2M}{r}\right) \cdot e^{-\frac{2M}{r}} + 1 \quad (36),$$

$$R_{33} = \sin^2(\vartheta) \cdot \left(-\left(1 + \frac{2M}{r}\right) \cdot e^{-\frac{2M}{r}} + 1\right) = \sin^2(\vartheta) \cdot R_{22} \quad (37),$$

$$R_{44} = +\left(\frac{4M^2}{r^4} - \frac{2M}{r^3}\right) \cdot e^{-\frac{4M}{r}} - \frac{2M^2}{r^4} + \frac{2M}{r^3} \quad (38).$$

Krümmungsskalar

Der Krümmungsskalar ergibt sich aus der Kontraktion des Ricci-Tensors

$$R = g^{ik} R_{ik} = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} + g^{44} R_{44} \quad (39),$$

welche zum Glück wenig Terme aufweist, da der Metrische Tensor bereits in Hauptachsenform vorliegt und alle Nebendiagonalelemente gleich null sind. Da wir die relevanten Komponenten des Ricci-Tensors bereits bestimmt haben, haben wir nur noch die kontravarianten Komponenten g^{kk} für den Metrischen Tensors anzugeben

$$\langle g \rangle^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g^{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{2M}{r}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-\frac{2M}{r}} \end{pmatrix} \quad (40).$$

Aus (39) und (30) folgt für den Krümmungsskalar

⁵ Die Herleitungen sind im Anhang zu finden.

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff
8.9.2018



$$R = +\frac{2}{r^2} + e^{-\frac{2M}{r}} \cdot \left(-\frac{6M^2}{r^4} - \frac{2M}{r^3} - \frac{2}{r^2} \right) + e^{+\frac{2M}{r}} \cdot \left(\frac{2M^2}{r^4} - \frac{2M}{r^3} \right) \quad (41).$$

Einstein-Tensor

Ohne kosmologischen Term ist der Einstein-Tensor durch

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} R \cdot g_{ik} \quad (42)$$

gegeben. Da wir die Komponenten des Ricci-Tensors sowie den Krümmungsskalar bereits bestimmt haben, müssen wir zur Berechnung der Komponenten des Einstein-Tensors nur noch die Produkte $R \cdot g_{ik}$ bilden, diese sind:

$$R \cdot g_{11} = -\frac{2M^2}{r^4} e^{\frac{2M}{r}} \quad (43),$$

$$R \cdot g_{22} = r^2 \left(-\left(1 + \frac{2M}{r} \right) \cdot e^{-\frac{2M}{r}} + 1 \right) \quad (44),$$

$$R \cdot g_{33} = r^2 \cdot \sin^4(\vartheta) \cdot \left(-\left(1 + \frac{2M}{r} \right) \cdot e^{-\frac{2M}{r}} + 1 \right) \quad (45),$$

$$R \cdot g_{44} = -\left(\frac{4M^2}{r^4} - \frac{2M}{r^3} \right) \cdot e^{-\frac{6M}{r}} - \left(-\frac{2M^2}{r^4} + \frac{2M}{r^3} \right) \cdot e^{-\frac{2M}{r}} \quad (46).$$

Damit finden wir für den Einstein-Tensor die folgenden Komponenten:

$$G_{11} = -\frac{2M^2}{r^4} + \frac{M^2}{r^4} e^{\frac{2M}{r}} \quad (47),$$

$$G_{22} = \left(\frac{3M^2}{r^2} - \frac{M}{r} \right) \cdot e^{-\frac{2M}{r}} \quad (48),$$

$$G_{33} = \sin^2(\vartheta) \cdot \left(\frac{3M^2}{r^2} - \frac{M}{r} \right) \cdot e^{-\frac{2M}{r}} = \sin^2(\vartheta) \cdot G_{22} \quad (49),$$

$$G_{44} = \left(\frac{M^2}{r^4} - \frac{3M}{r^3} - \frac{1}{r^2} \right) \cdot e^{-\frac{4M}{r}} - \left(\frac{M^2}{r^4} - \frac{M}{r^3} \right) + \frac{1}{r^2} e^{-\frac{2M}{r}} \quad (50).$$

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff
8.9.2018



2. Diskussionen

Ricci-Tensor

Nachdem wir die uns interessierenden Größen berechnet haben, wollen wir uns nun mit deren Verhalten genauer beschäftigen. Weil der Ricci-Tensor eine fundamentale Größe in den Einstein'schen Feldgleichungen darstellt, aus dem sich der Krümmungsskalar herleitet, beginnen wir mit der Untersuchung des Ricci-Tensors. Die Gleichungen

$$R_{ik} = 0 \tag{51}$$

definieren die so genannten Einstein-Räume. Sie sind zugleich die Feldgleichung für das Einstein-Vakuum⁶ - ohne kosmologischen Term. Die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik repräsentiert demzufolge kein Einstein-Vakuum, weil der Ricci-Tensor im materiefreien Raum nicht verschwindet.

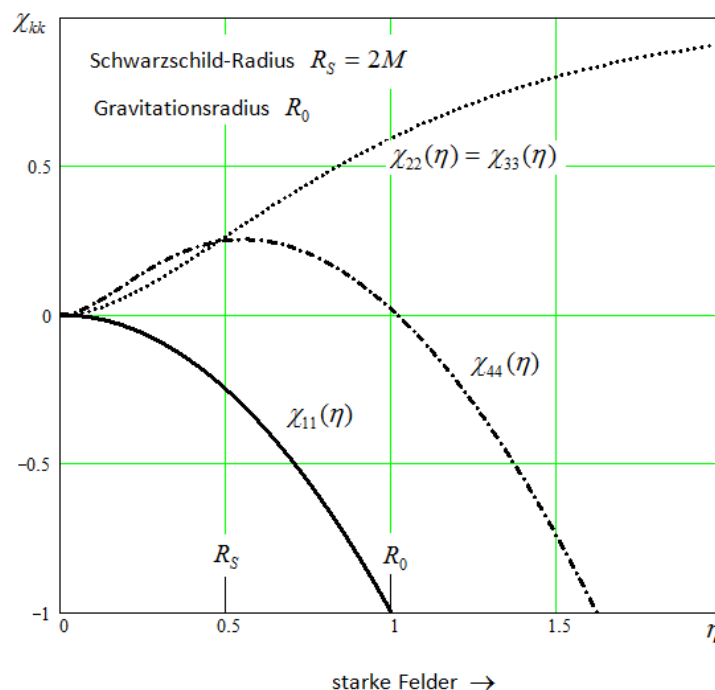


Abbildung 1 zeigt das Verhalten der Funktion $\chi_{kk}(\eta)$, mit $\eta = \frac{M}{r}$, die mit den Komponenten des Ricci-Tensors über die Beziehungen $R_{11} = \frac{2}{r} \chi_{11}(\eta)$, $R_{22} = \chi_{22}(\eta)$, $R_{33} = \sin(\vartheta) \cdot \chi_{22}(\eta)$, $R_{44} = \frac{2}{r^2} \chi_{44}(\eta)$ verknüpft ist. $\eta = 0$ entspricht dem räumlich Unendlichen $r \rightarrow \infty$, bzw. $M = 0$.

⁶ In diesem Sinne definieren die Einstein'schen Feldgleichungen einen besonderen Materietensor der Raum-Zeit. Ein solcher Tensor $G_{ik} \neq 0$ ist zu untersuchen, um die spezifischen Eigenschaften eines solchen Objektes zu charakterisieren und diese mit denen normaler Materietensoren zu vergleichen. Das ist aber nicht Gegenstand dieser Arbeit.

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff

8.9.2018



Um das Verhalten des Ricci-Tensors zu verstehen, werten wir das Verhalten seiner nicht verschwindenden Komponenten numerisch aus (Abbildung 1). Für diesen Zweck ist es sinnvoll eine normierte Darstellung zu wählen, die gut interpretierbar ist. Da das Verhältnis $\eta = \frac{M}{r}$ in der allgemeinen Relativitätstheorie eine besondere Rolle spielt, bei $\eta = \frac{1}{2}$ befindet sich der

Schwarzschild-Radius, bekommen wir mit dem Parameter η eine Vorstellung, in welchem Bereich der Stärke der Gravitation wir uns befinden. Aus diesem Grunde formen wir die Ausdrücke (35) bis (38) für die Komponenten des Ricci-Tensors etwas um und definieren dadurch unsere Funktionen $\chi_{kk}(\eta)$, die uns eine Vorstellung vom Verhalten der Tensorkomponenten geben sollen

$$\chi_{11}(\eta) = -\eta^2$$

$$\chi_{22}(\eta) = \chi_{33}(\eta) = 1 - (1 + 2\eta) \cdot e^{-2\eta} \quad (52)$$

$$\chi_{44}(\eta) = (2\eta^2 - \eta) \cdot e^{-4\eta} + \eta - \eta^2$$

und deren Verhalten in der Abbildung 1 dargestellt ist.

Krümmungsskalar

Während in der Schwarzschild-Metrik die 4-dimensionale Krümmung verschwindet, was eine direkte Folge der Einstein'schen Feldgleichungen ist, bleibt in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik eine geringe Restkrümmung erhalten (vergleiche mit (41)):

$$R = \frac{2}{r^2} \left(1 - e^{-\frac{2M}{r}} \right) - \left(\frac{6M^2}{r^4} + \frac{2M}{r^3} \right) \cdot e^{-\frac{2M}{r}} + \left(\frac{2M^2}{r^4} - \frac{2M}{r^3} \right) \cdot e^{+\frac{2M}{r}} \quad (53).$$

Es ist sofort evident, dass hier negative und positive Terme konkurrieren. Aus diesem Grunde untersuchen wir das Verhalten des Vorzeichens des Krümmungsskalars. Um die Struktur besser untersuchen zu können, ziehen wir zuerst den Faktor $\frac{2}{r^2}$ aus den Klammern des zweiten und des dritten Terms:

$$R = \frac{2}{r^2} \left[\left(1 - e^{-\frac{2M}{r}} \right) - \left(\frac{3M^2}{r^2} + \frac{M}{r} \right) \cdot e^{-\frac{2M}{r}} + \left(\frac{M^2}{r^2} - \frac{M}{r} \right) \cdot e^{+\frac{2M}{r}} \right] \quad (54).$$

Wir erkennen, dass die Funktion, die durch die eckige Klammer repräsentiert wird und die wir mit

$$\chi(\eta) = (1 - e^{-2\eta}) - (3\eta^2 + \eta) \cdot e^{-2\eta} + (\eta^2 - \eta) \cdot e^{+2\eta} \quad (55)$$

bezeichnen, allein vom Verhältnis $\eta = \frac{M}{r}$ abhängig ist. Der Krümmungsskalar kann auch durch

$$R = \frac{2}{r^2} \chi(\eta) \quad (56)$$

ausgedrückt werden, kurz und bündig gilt

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff

8.9.2018



$$\text{Signum}(R) = \text{Signum}(\chi) \quad (57).$$

Aus diesem Grunde untersuchen wir $\text{Signum}(\chi)$. Für große Abstände, d.h. für $r \gg M$ gilt $\eta \ll 1$. Das ist z.B. im Sonnensystem der Fall. Wenn $\eta \ll 1$ gilt, dann folgt unmittelbar $\eta^2 \ll \eta$ und das bedeutet, wir können in (55) die Terme mit η^2 vernachlässigen. Diese Vernachlässigung führt auf

$$\chi(\eta) = 1 - e^{-2\eta} - \eta \cdot e^{-2\eta} - \eta \cdot e^{+2\eta} \quad (58).$$

Für $\eta = 0$ folgt

$$\chi(\eta) = 1 - e^0 - 0 \cdot e^0 - 0 \cdot e^0 = 0 \quad (59).$$

Die erste Ableitung, welche uns den Anstieg der Funktion liefert ist

$$\frac{d\chi(\eta)}{d\eta} = e^{-2\eta} + 2\eta \cdot e^{-2\eta} - e^{+2\eta} - 2\eta \cdot e^{+2\eta} \quad (60).$$

Dieser Anstieg ist an der Stelle $\eta = 0$ gleich

$$\frac{d\chi(\eta=0)}{d\eta} = e^0 + 0 \cdot e^0 - e^0 - 0 \cdot e^0 = 0 \quad (61).$$

Das ist ein bemerkenswertes Resultat, dass auch der Anstieg null wird. Wir hatten gehofft, einen positiven oder negativen Wert zu erhalten, um aus dem Punkt $\chi(\eta = 0) = 0$ und der Ableitung darauf zu schließen, ob die Funktion $\chi(\eta)$ aus dem positiven oder aus dem negativen Bereich gegen null geht.

Doch zum Glück verhält sich die 2. Ableitung etwas anders und wir können vom Vorzeichen der zweiten Ableitung auf das Vorzeichen der 1. Ableitung bei $\eta > 0$ schließen. Die zweite Ableitung ist

$$\frac{d^2\chi(\eta)}{d\eta^2} = -4\eta \cdot e^{-2\eta} - 4 \cdot e^{-2\eta} - 4\eta \cdot e^{+2\eta} \quad (62).$$

Für $\eta = 0$ folgt nun einfach

$$\frac{d^2\chi(\eta=0)}{d\eta^2} = -0 \cdot e^0 - 4 \cdot e^0 - 0 \cdot e^0 = -4 \quad (63).$$

Die Logik ist mit diesem Resultat nun folgende: Bei $\eta = 0$ hat die zweite Ableitung einen negativen Wert, d.h. der Anstieg des Anstiegs⁷ ist negativ. Das muss wegen der Stetigkeit von (62) sowohl linksseitig als auch rechtsseitig, zumindest innerhalb einer ε -Umgebung, gelten. Der Anstieg nimmt in dieser Umgebung also stetig ab und ist an der Stelle $\eta = 0$ selbst null. Da er in der Umgebung

⁷ Der Anstieg des Anstiegs ist die zweite Ableitung der Funktion.

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff
8.9.2018



abnimmt, muss er im Bereich $\eta > 0$ kleiner als null werden. Wenn aber der Anstieg der Funktion $\chi(\eta)$ für $\eta > 0$ selbst kleiner null sein muss, dann ist die Funktion $\chi(\eta)$ in diesem Bereich fallend. Wenn unter dieser Voraussetzung die Funktion an der Stelle $\eta = 0$ selbst null ist, muss sie im Bereich $\eta > 0$ negativ sein, d.h.

$$\chi(0 < \eta \ll 1) < 0 \quad (64).$$

Wegen der Beziehung (56) bedeutet das: Der vierdimensionale Raum, die Raum-Zeit, hat im genannten Bereich eine negative Krümmung.

Wir untersuchen nun den gegenteiligen Fall, dass nämlich $\eta \gg 1$ gilt. Das ist der Bereich extremer Gravitationsfelder – in der Schwarzschild-Metrik wäre das der Fall innerhalb eines Schwarzen Loches, wir erinnern aber daran, das Schwarze Löcher in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik nicht existieren können. Die Beziehung (55) vereinfacht sich unter der genannten Voraussetzung zu

$$\chi(\eta) = 1 - e^{-2\eta} - 3\eta^2 \cdot e^{-2\eta} + \eta^2 \cdot e^{+2\eta} \quad (65),$$

und für hinreichend große η dominiert allein der positive Term

$$\chi(\eta) \cong +\eta^2 e^{+2\eta} \quad (66).$$

Es findet demnach ein Regime-Wechsel von negativer Krümmung hin zu einer positiven Krümmung statt, wobei der Regime-Wechsel allein von η abhängig ist. Aus diesem Grunde müssen wir uns die Frage vorlegen, ab welchem Verhältnis $\eta = \eta_0$ dieser Wechsel eintritt. Wir haben also die Nullstelle $\chi(\eta_0) = 0$ für die Beziehung (55) zu bestimmen, d.h.

$$0 = (1 - e^{-2\eta}) - (3\eta^2 + \eta) \cdot e^{-2\eta} + (\eta^2 - \eta) \cdot e^{+2\eta} \quad (67).$$

Das ist analytisch nicht trivial, aus diesem Grunde wollen wir uns mit dem Kurvenverlauf begnügen.

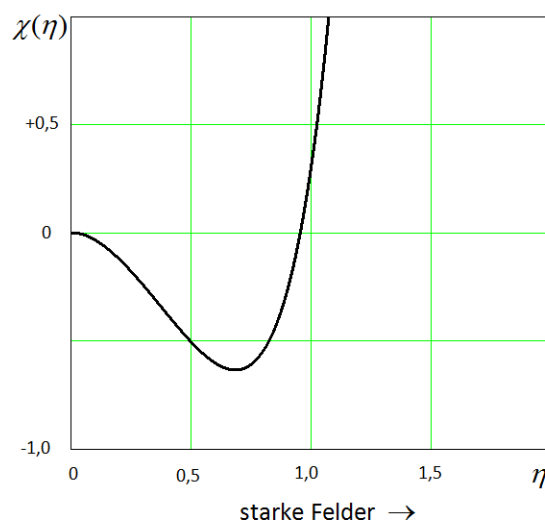


Abbildung 2 zeigt die skalare Krümmung.

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff
8.9.2018



Wir sehen in der linken Kurve die Funktion $\chi(\eta)$ in Abhängigkeit von η abgebildet. Zur Bewertung müssen wir uns vor Augen halten, dass kleine Werte η schwache Gravitationsfelder bedeuten, dass

wir uns bei $\eta = \frac{1}{2}$ am Schwarzschild-Radius und bei $\eta = 1$ am klassischen Gravitationsradius befinden.

Es sei aber noch einmal darauf hingewiesen, dass diese besonderen Radien nur in der klassischen Newtonschen Gravitationstheorie, bzw. der Schwarzschild-Radius nur in der Einstein'schen allgemeinen Relativitätstheorie eine ausgezeichnete Rolle spielen⁸, nicht jedoch in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik. Wir bemerken nun, dass hinsichtlich des Vorzeichens der skalaren Krümmung weder der Schwarzschild-Radius noch der Gravitationsradius eine besondere Rolle spielen. Der Umschlag der Krümmung findet in einem Zwischenbereich statt.

Fazit: Für hinreichend schwache Felder ist die Raum-Zeit gemäß den Einstein'schen Feldgleichungen für das Vakuumfeld nahezu ungekrümmt, d.h. $R \approx -0$. Im Bereich zunehmender Gravitation, hin zu superstarken Feldern, nimmt die Krümmung im negativen Sinne zu, sie wird negativer und erreicht zwischen Schwarzschild-Radius und Gravitationsradius ein lokales Maximum der Negativität. Doch noch vor dem Gravitationsradius verschwindet die Krümmung vollständig, um dann beliebig gegen $+\infty$ anzuwachsen.

Einstein-Tensor

Die Komponenten des Einstein-Tensors können ähnlich wie die Komponenten des Ricci-Tensors und wie die skalare Krümmung in einer geeigneten Form dargestellt werden.

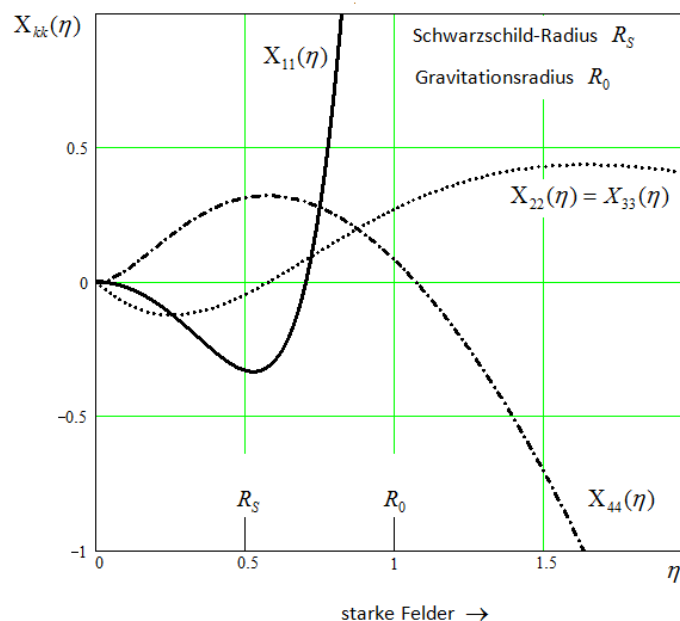


Abbildung 3 zeigt die Funktion X_{kk} der Komponenten des Einsteintensors.

⁸ In der Newtonschen Gravitationstheorie fällt beim Gravitationsradius die Kreisbahngeschwindigkeit mit der Lichtgeschwindigkeit zusammen und der Schwarzschild-Radius markiert den Radius, bei welchem die Lichtgeschwindigkeit mit der 2. kosmischen Geschwindigkeit, nämlich der Fluchtgeschwindigkeit, zusammenfällt. In der Allgemeinen Relativitätstheorie markiert der Schwarzschild-Radius das Auftreten der Schwarzschild-Singularität und ist das Definitionsmerkmal kugelsymmetrischer nicht rotierender Schwarzer Löcher.

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff

8.9.2018



Die in Abbildung 3 dargestellten Funktionen sind durch die folgenden Beziehungen definiert:

$$G_{11} = \frac{2}{r^2} X_{11}(\eta) = \frac{2}{r^2} (-2\eta^2 + \eta^4 \cdot e^{+2\eta}) \quad (67),$$

$$G_{22} = X_{22}(\eta) = (3\eta^2 - \eta) \cdot e^{-2\eta} \quad (68),$$

$$G_{33} = \sin^2(\vartheta) \cdot X_{22}(\eta) \quad (69),$$

$$G_{44} = \frac{1}{r^2} X_{44}(\eta) = \frac{1}{r^2} [(\eta^2 - 3\eta - 1) \cdot e^{-4\eta} - \eta^2 + \eta + e^{-2\eta}] \quad (70).$$

Schwache Felder

Schwache Felder definieren wir durch die Bedingung $\eta \ll 1$. Am Sonnenrand bestimmt sich dieser Parameter zu

$$\eta = \frac{\gamma}{c^2} \cdot \frac{M_0}{r_0} \approx \frac{6.677 \cdot 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}}{(2.99792458 \cdot 10^8 ms^{-1})^2} \cdot \frac{1.9884 \cdot 10^{30} kg}{6.96342 \cdot 10^8 m} \approx 2.12 \cdot 10^{-6} \quad (71).$$

Tatsächlich ist sogar das Sonnenfeld ein extrem schwaches Feld. Berechnet man für dieses Feld die Komponenten des Einstein-Tensors am Sonnenrand, dann ergeben sich die folgenden Werte:

$$G_{11} \approx -3.7 \cdot 10^{-29} m^{-2} \approx 0 \quad (72),$$

$$G_{22} \approx G_{33} \approx -2.1 \cdot 10^{-6} \approx 0 \quad (73),$$

$$G_{44} \approx -3.5 \cdot 10^{-23} m^{-2} \approx 0 \quad (75).$$

Wir sehen hier, dass in Sonnennähe die Einstein'schen Feldgleichungen praktisch erfüllt sind, selbst, wenn die wahre Metrik die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik wäre. Die Komponenten G_{11} und G_{44} haben sogar den Charakter Eddington'scher Zahlen. Auch das ist ein Hinweis darauf, dass man im Planetensystem nicht zwischen der Schwarzschild-Metrik und der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik experimentell unterscheiden kann.

Negativität der Komponenten des Einstein-Tensors

Wir haben schon an verschiedenen Stellen auf die negative Signatur hingewiesen. Um diese negative Signatur einer Interpretation zu unterziehen, kommen wir auf die Begründung der Einstein'schen Feldgleichungen zurück. In seiner Genialität unterwarf Einstein die Feldgleichungen den folgenden Forderungen, vergleiche [3] ab Seite 97, hier in Kurzfassung:

1. Kovarianzprinzip: Die Feldgleichungen sollten Tensorgleichungen sein, also Gleichungen, welche eine Darstellung der Gravitation ermöglichen, die unabhängig von speziell gewählten Koordinatensystemen ist.
2. Die Gleichungen sollen partielle Differentialgleichungen von maximal zweiter Ordnung sein, wie das bei allen Feldgleichungen der Physik der Fall ist.

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff

8.9.2018



3. Newton'scher Grenzfall: Die Gleichungen sollen für schwache Gravitationsfelder in die Poisson-Gleichungen $\Delta\phi = 4 \cdot \pi \cdot \gamma \cdot \rho$ übergehen.
4. Feldquelle sollte der Energie-Impuls-Tensor T_{ik} sein, da er das speziell-relativistische Analogon zur Massendichte ist.
5. Im flachen vierdimensionalen Raum (Raum-Zeit) sollen die T_{ik} verschwinden.

Um die erste Forderung zu erfüllen benötigen wir nur einen Tensor, der die Ableitungen der metrischen Tensorkomponenten bis zur zweiten Ordnung enthält. Als Bauelemente für den Einstein-Tensor stehen nur der Krümmungstensor, der Metrische Tensor und der ε – Tensor zur Verfügung. Zur Erfüllung der vierten Forderung muss die Tensor-Gleichung die quellartige Struktur

$$G_{ik} = \kappa \cdot T_{ik} \quad (76)$$

mit der Konstante κ haben. Jetzt kommt ein sehr wichtiger Punkt! Auf der linken Seite der Gleichung steht die Geometrie, auf der rechten Seite der Energie-Impuls-Tensor. Daraus ergeben sich weitreichende Einschränkungen für die Auswahl der Feldgleichungen, durch welche die Feldgleichung sich sehr einfach ergeben. Der Energie-Impuls-Tensor ist erstens divergenzfrei, d.h. es gilt

$$T^{ik}{}_{;k} = 0 \quad (77)$$

und der Energie-Impuls-Tensor erfüllt zweitens die Symmetrie

$$T_{ik} = T_{ki} \quad (78).$$

Aufgrund der Struktur der Gleichung (76) müssen sich die Eigenschaften (77) und (78) auf den Einstein-Tensor, der aus geometrischen Objekten aufzubauen ist, übertragen. Es muss

$$G^{ik}{}_{;k} = 0 \quad (79)$$

und

$$G_{ik} = G_{ki} \quad (80)$$

gelten. Es lässt sich zeigen, dass es nur einen in den Komponenten des Krümmungstensors linearen Tensor gibt, der die Eigenschaften (79) und (80) erfüllt. Es handelt sich dabei um den Tensor

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R \cdot g_{ik} \quad (81).$$

Da auch der metrische Tensor g_{ik} diese Eigenschaften befriedigt, ist die maximale mögliche Struktur des Einstein-Tensors durch

$$G_{ik} = R_{ik} - \frac{1}{2} R \cdot g_{ik} + \lambda \cdot g_{ik} \quad (82)$$

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff
8.9.2018



gegeben, wobei λ eine unbestimmte Konstante⁹ ist. Die Allgemeine Relativitätstheorie besitzt eine erhebliche Überzeugungskraft, die ihr eine andere Theorie nicht so einfach streitig machen kann. Neben den erheblichen Erfolgen der Allgemeinen Relativitätstheorie im Sonnensystem und im kosmischen Raum geht von den ihr zugrundeliegenden physikalisch sinnvollen Forderungen 1 bis 5 eine so erhebliche Einschränkung der mathematischen Möglichkeiten aus, dass die Feldgleichungen quasi von selbst „herauspurzeln“ – absolut elegant, genial oder was man sonst noch als Terminus für eine absolute Lobpreisung¹⁰ wählen möchte. Trotzdem ist es möglich, diese Einschränkungen zu durchbrechen, allerdings erfordert das eine Erweiterung der mathematischen Ausdruckformen¹¹ und die Einführung schwer überprüfbarer Hypothesen – das sei hier aber nur am Rande bemerkt. Uns kommt es hier auf einen anderen Gesichtspunkt an, nämlich den Newtonschen Grenzfall. Er soll uns helfen, die Negativität des Einstein-Tensors bei Verwendung der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik zu interpretieren. Wieder orientieren wir uns an den Ausführungen von Stephani in [3], ab Seite 89.

In der Newtonschen Gravitationstheorie ist die Massendichte ρ die einzige Quelle des Gravitationsfeldes. Für uns ist es dabei von Bedeutung, dass für die Massendichte $\rho > 0$ gilt. Eine negative Masse ist in der Newtonschen Physik nicht bekannt. Wenn wir nun den Newtonschen Grenzfall untersuchen wollen, so müssen wir diesen zunächst charakterisieren. Dazu wählen wir ein Koordinatensystem, in dem die Energiedichte die wesentliche Quelle des Gravitationsfeldes darstellt, und alle anderen Komponenten des Energie-Impuls-Tensors vernachlässigt werden können, d.h. es soll

$$T_{44} = \rho \cdot c^2 \quad (83)$$

die einzige Quelle des Gravitationsfeldes sein. Weiterhin sollen die Felder nur langsam veränderlich sein, d.h. Ableitungen nach Koordinate $x^4 = c \cdot t$ sollen vernachlässigbar sein. Schließlich soll die Metrik auch nur geringfügig von der Metrik eines Minkowski-Raumes abweichen, d.h. es soll

$$g_{ik} = \bar{g}_{ik} + s_{ik} \quad (84)$$

mit $|s_{ik}| \ll 1$ und

$$\langle \bar{g} \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (85)$$

⁹ Diese Konstante wird als kosmologische Konstante bezeichnet. Die Schwarzschild-Metrik setzt $\lambda = 0$ voraus.

¹⁰ Meine Frau meint, das klingt ironisch. Ich sollte das nicht so formulieren. Das meine ich aber gar nicht so, denn wer das nicht so positiv empfindet, hat die Theorie Einsteins gar nicht verstanden. Aber trotzdem besitzt die Allgemeine Relativitätstheorie ein Singularitätsproblem! Sie ist an der Stelle viel weniger kausal als die Quantenmechanik.

¹¹ Erweiterung ins Komplexe oder Erweiterung in Pseudokomplexe oder Änderung der Koppelung, z.B. Ersetzung einer quellartigen Koppelung durch eine potentialartige Koppelung zwischen Materie und Gravitation, Verlassen der Beschränkung auf nur höchstens zweite Ableitungen, Einbeziehung der Quantenphysik, Änderung der Dimensionszahl usw. ... Aber auf der Grundlage welcher physikalisch begründeten Prinzipien? Die Analyse der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik soll eben auch dazu beitragen, mögliche Ideen zu entwickeln.

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff
8.9.2018



gelten, d.h. \bar{g}_{ik} , gesprochen „g-flach“, sind die Komponenten des metrischen Tensors des Minkowski-Raumes, also der flachen Raum-Zeit. Der glatte Oberstrich, soll die Flachheit symbolisieren. Die Komponenten s_{ik} sind als eine geringe Störung aufzufassen.

Bevor wir uns mit dem Newtonschen Grenzfall beschäftigen, führen wir zunächst eine Verjüngung der Gleichung (82) durch, wobei wir von $\lambda = 0$ ausgehen¹². Dazu ziehen wir zunächst den ersten Index nach oben¹³

$$R^i_k - \frac{1}{2} R \cdot g^i_k = \kappa \cdot T^i_k \quad (86),$$

dabei wird $g^i_k \equiv \delta^i_k$, dem Kronecker-Symbol, mit der Eigenschaft $\delta^i_k = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$. Die Verjüngung

erfolgt durch die Summenbildung

$$R^k_k - \frac{1}{2} R \cdot \delta^k_k = \kappa \cdot T^k_k \quad (87),$$

d.h. ausführlich aufgeschrieben

$$R^1_1 + R^2_2 + R^3_3 + R^4_4 - \frac{1}{2} R - \frac{1}{2} R - \frac{1}{2} R - \frac{1}{2} R = \kappa (T^1_1 + T^2_2 + T^3_3 + T^4_4) \quad (88).$$

Da $R = R^k_k$ und $T = T^k_k$ die spezifischen Skalare sind, ergibt sich zusammengefasst

$$R - 2R = \kappa \cdot T \quad (89),$$

d.h.

$$-R = \kappa \cdot T, \text{ bzw. } R = -\kappa \cdot T \quad (90).$$

Nehmen wir die letzte Beziehung in (90) und gehen mit dieser in die Feldgleichung ein, so erhält diese die veränderte Form

$$R_{ik} - \frac{1}{2} (-\kappa \cdot T) g_{ik} = \kappa \cdot T_{ik} \quad (91).$$

Durch Umstellen lässt sich nun der Ricci-Tensor als eine vom Energie-Impuls-Tensor und dessen Spur abhängige Größe darstellen

$$R_{ik} = \kappa \left(T_{ik} - \frac{1}{2} T \cdot g_{ik} \right) \quad (92).$$

¹² Die Berücksichtigung des kosmologischen Terms führt auf keine neuen Erkenntnisse. In der Anlage ist der Einstein-Tensor mit λ -Term zu finden.

¹³ Das Hochziehen eines Index erfolgt mittels der Operation $W^i_k = g^{mi} W_{mk}$, diese explizit auszuführen, ist aber für die obige Rechnung nicht erforderlich.

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff

8.9.2018



Die Beziehung (92) stellt noch keine Näherung dar, es ist die Feldgleichung, nur in anderer Form. Doch jetzt bauen wir unsere Newtonsche Näherung in die Beziehung ein. Dazu ersetzen wir erstens die g_{ik} durch den ungestörten Tensor \bar{g}_{ik} . Zweitens müssen wir jetzt die Spur T des Energie-Impuls-Tensors konkret bestimmen, d.h.

$$T = T^k_k = \bar{g}^{km} T_{km} = -\rho \cdot c^2 \quad (93)$$

bilden. Dieses Resultat folgt, da auf Grund der Näherung, d.h. der Vernachlässigung von Bewegungen nur die Komponente $T_{44} = \rho \cdot c^2$ relevant ist, alle anderen Komponenten sind praktisch null, und $\bar{g}^{44} = -1$ gilt. Aus diesem Grunde interessiert uns auch nur die Komponente R_{44} für unsere Interpretation. Setzen wir nun (83) und (93) sowie $g_{ik} \cong \bar{g}_{ik}$ in die exakte Gleichung (92) ein, dann finden wir

$$R_{44} = \kappa \cdot \rho \cdot c^2 - \frac{1}{2} \kappa \cdot (-\rho \cdot c^2) \cdot (-1) = \kappa \cdot \rho \cdot c^2 - \frac{1}{2} \kappa \cdot \rho \cdot c^2 = +\frac{\kappa}{2} \rho \cdot c^2 > 0 \quad (94).$$

Wir sehen, dass die positiv definierte Materiedichte (Massendichte) ein positives Vorzeichen der Komponente R_{44} des Ricci-Tensors bewirkt. Der Krümmungsskalar ist in dieser Näherung negativ:

$$R = \bar{g}^{11} R_{11} + \bar{g}^{22} R_{22} + \bar{g}^{33} R_{33} + \bar{g}^{44} R_{44} = 0 + 0 + 0 - \frac{\kappa}{2} \rho \cdot c^2 < 0 \quad (95).$$

Vergleichen wir diese Eigenschaften mit den Ergebnissen für die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik, so zeigt der Krümmungsskalar in schwachen Feldern dieselbe Eigenschaft wie in (95). Die Funktion

$$\chi_{44}(\eta) = (2\eta^2 - \eta) \cdot e^{-4\eta} + \eta - \eta^2 \quad (96),$$

die für die Signatur von R_{44} maßgeblich ist, kann an der Stelle $\eta = 0$ entwickelt werden, indem wir einfach die Exponentialfunktion nähern

$$e^{-x} \approx 1 - x \quad (97).$$

$$\chi_{44}(\eta) \approx (2\eta^2 - \eta)(1 - 4\eta) + \eta - \eta^2 \quad (98),$$

es folgt

$$\chi_{44}(\eta) \approx 2\eta^2 - 8\eta^3 - \eta + 4\eta^2 + \eta - \eta^2 = +6\eta^2 - 8\eta^3 \quad (99).$$

Für hinreichend kleine positive Werte von η muss der Term 2. Ordnung überwiegen, d.h. es muss in diesem Falle

$$\chi_{44}(\eta \ll 1) > 0 \quad (100)$$

gelten. Die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik verhält sich in sehr schwachen Feldern folglich so, als wäre im Sinne der Einstein'schen Feldgleichungen eine winzige positive Massendichte im Raum

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff

8.9.2018



vorhanden. Trotzdem kann sie nicht als eine solche Lösung der Einstein'schen Feldgleichungen betrachtet werden, denn dass es sich nicht um „normale Materie“ handeln kann, und eine Eigenschaft der Raum-Zeit selbst sein muss, wird in den superstarken Feldern deutlich. In superstarken Feldern ändert die Metrik ihren Charakter grundlegend, was an der Abschirmungswirkung der Schwerkraft deutlich wird, wodurch es nicht zur Ausbildung von Feldsingularitäten kommt. Man kann dieses seltsame Verhalten in schwachen Feldern als eine Art Dunkle-Materie-Effekt der Raum-Zeit interpretieren.

Quellen

[1] Klaus Retzlaff, „Einstein- und Post-Einstein-Effekte im Zentralfeld“, epubli 2017

[2] Klaus Retzlaff, „Ist die Allgemeine Relativitätstheorie nur ein angenähertes Gravitationsgesetz?“, Astronomische Gesellschaft Magdeburg e.V. www.astronomie-magdeburg.de, 2018

[3] H. Stephani, „Allgemeine Relativitätstheorie“, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1980 wird auf der Seite 101

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff
8.9.2018



Anhang

Im Anhang werden verwendete Beziehungen konserviert, die den Rahmen des Artikels sprengen würden. Sie stehen daher weiteren Rechnungen zur Verfügung und unterstützen die rechnerische Überprüfung. Aus schreibtechnischen und rechnerischen Gründen, die mit der großen Termanzahl und Indexanzahl in Zusammenhang stehen, wurden Größen z.T. umbenannt, um Index- und Term-Substitutionen mit den Möglichkeiten der „Suchen und Ersetzen“ – Funktion eines Textverarbeitungsprogramms durchzuführen. Diese Vorgehensweise betrifft insbesondere beim Ricci-Tensor die Christoffel-Symbole und deren Derivierte.

Christoffel-Symbole für die Textvorlage

Die Christoffel-Symbole sind im Text-Format wie folgt definiert:

$$\Gamma_{ik}^l = Clik \quad (A1).$$

Derivierte der Christoffel-Symbole für die Textvorlage

Die Ableitungen der Christoffel-Symbole sind im Text-Format wie folgt definiert:

$$\Gamma_{ik,m}^l = \frac{\partial}{\partial x^m} \Gamma_{ik}^l = Clik,m \quad (A2).$$

Ricci-Tensor mit freien Indizes für die Textvorlage

Die Komponenten des Ricci-Tensors

$$R_{ik} = R_{imk}^m = \Gamma_{ik,m}^m - \Gamma_{im,k}^m + \Gamma_{nm}^m \Gamma_{ik}^n - \Gamma_{nk}^m \Gamma_{im}^n \quad (A3)$$

mit freien Komponenten (i, k nicht festgelegt) sind für das Text-Format wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} R_{ik} = & C1ik,1+C2ik,2+C3ik,3+C4ik,4- \\ & -C1i1,k-C2i2,k-C3i3,k-C4i4,k+ \\ & +C111C1ik+C212C1ik+C313C1ik+C414C1ik+ \\ & +C121C2ik+C222C2ik+C323C2ik+C424C2ik+ \\ & +C131C3ik+C232C3ik+C333C3ik+C434C3ik+ \\ & +C141C4ik+C242C4ik+C343C4ik+C444C4ik- \\ & -C11kC1i1-C21kC1i2-C31kC1i3-C41kC1i4- \\ & -C12kC2i1-C22kC2i2-C32kC2i3-C42kC2i4- \\ & -C13kC3i1-C23kC3i2-C33kC3i3-C43kC3i4- \\ & -C14kC4i1-C24kC4i2-C34kC4i3-C44kC4i4 \end{aligned} \quad (A4).$$

Ricci-Tensor-Komponenten für die Text-Vorlage

Die vollständige Liste der Tensorkomponenten mit $R_{ik} = R_{ik}$, $i=1...4$, $k=1...4$ ist durch die folgende Liste gegeben:

$$\begin{aligned} R_{11} = & C111,1+C211,2+C311,3+C411,4- \\ & -C111,1-C212,1-C313,1-C414,1+ \\ & +C111C111+C212C111+C313C111+C414C111+ \\ & +C121C211+C222C211+C323C211+C424C211+ \\ & +C131C311+C232C311+C333C311+C434C311+ \end{aligned} \quad (A5)$$

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff

8.9.2018



+C141C411+C242C411+C343C411+C444C411-
-C111C111-C211C112-C311C113-C411C114-
-C121C211-C221C212-C321C213-C421C214-
-C131C311-C231C312-C331C313-C431C314-
-C141C411-C241C412-C341C413-C441C414

R12=

C112,1+C212,2+C312,3+C412,4-
-C111,2-C212,2-C313,2-C414,2+
+C111C112+C212C112+C313C112+C414C112+
+C121C212+C222C212+C323C212+C424C212+
+C131C312+C232C312+C333C312+C434C312+
+C141C412+C242C412+C343C412+C444C412-
-C112C111-C212C112-C312C113-C412C114-
-C122C211-C222C212-C322C213-C422C214-
-C132C311-C232C312-C332C313-C432C314-
-C142C411-C242C412-C342C413-C442C414

(A6)

R13=

C113,1+C213,2+C313,3+C413,4-
-C111,3-C212,3-C313,3-C414,3+
+C111C113+C212C113+C313C113+C414C113+
+C121C213+C222C213+C323C213+C424C213+
+C131C313+C232C313+C333C313+C434C313+
+C141C413+C242C413+C343C413+C444C413-
-C113C111-C213C112-C313C113-C413C114-
-C123C211-C223C212-C323C213-C423C214-
-C133C311-C233C312-C333C313-C433C314-
-C143C411-C243C412-C343C413-C443C414

(A7)

R14=

C114,1+C214,2+C314,3+C414,4-
-C111,4-C212,4-C313,4-C414,4+
+C111C114+C212C114+C313C114+C414C114+
+C121C214+C222C214+C323C214+C424C214+
+C131C314+C232C314+C333C314+C434C314+
+C141C414+C242C414+C343C414+C444C414-
-C114C111-C214C112-C314C113-C414C114-
-C124C211-C224C212-C324C213-C424C214-
-C134C311-C234C312-C334C313-C434C314-
-C144C411-C244C412-C344C413-C444C414

(A8)

R21=

C121,1+C221,2+C321,3+C421,4-
-C121,1-C222,1-C323,1-C424,1+
+C111C121+C212C121+C313C121+C414C121+
+C121C221+C222C221+C323C221+C424C221+
+C131C321+C232C321+C333C321+C434C321+
+C141C421+C242C421+C343C421+C444C421-

(A9)

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff

8.9.2018



-C111C121-C211C122-C311C123-C411C124-
-C121C221-C221C222-C321C223-C421C224-
-C131C321-C231C322-C331C323-C431C324-
-C141C421-C241C422-C341C423-C441C424

R22=

C122,1+C222,2+C322,3+C422,4-
-C121,2-C222,2-C323,2-C424,2+
+C111C122+C212C122+C313C122+C414C122+
+C121C222+C222C222+C323C222+C424C222+
+C131C322+C232C322+C333C322+C434C322+ (A10)
+C141C422+C242C422+C343C422+C444C422-
-C112C121-C212C122-C312C123-C412C124-
-C122C221-C222C222-C322C223-C422C224-
-C132C321-C232C322-C332C323-C432C324-
-C142C421-C242C422-C342C423-C442C424

R23=

C123,1+C223,2+C323,3+C423,4-
-C121,3-C222,3-C323,3-C424,3+
+C111C123+C212C123+C313C123+C414C123+
+C121C223+C222C223+C323C223+C424C223+
+C131C323+C232C323+C333C323+C434C323+ (A11)
+C141C423+C242C423+C343C423+C444C423-
-C113C121-C213C122-C313C123-C413C124-
-C123C221-C223C222-C323C223-C423C224-
-C133C321-C233C322-C333C323-C433C324-
-C143C421-C243C422-C343C423-C443C424

R24=

C124,1+C224,2+C324,3+C424,4-
-C121,4-C222,4-C323,4-C424,4+
+C111C124+C212C124+C313C124+C414C124+
+C121C224+C222C224+C323C224+C424C224+
+C131C324+C232C324+C333C324+C434C324+ (A12).
+C141C424+C242C424+C343C424+C444C424-
-C114C121-C214C122-C314C123-C414C124-
-C124C221-C224C222-C324C223-C424C224-
-C134C321-C234C322-C334C323-C434C324-
-C144C421-C244C422-C344C423-C444C424

Aufgrund der Symmetrie des Ricci-Tensors $R_{ik} = R_{ki}$ sind die entsprechenden Vertauschungen nicht in der Liste enthalten. Es ist aber bei entsprechenden Substitutionen von Christoffel-Symbolen und ihren Derivierten zu berücksichtigen, dass symmetrische Christoffel-Symbole in manchen Termen auftreten, z.B. enthält die Komponente R24 den Term $+C131C324 = \Gamma_{31}^1 \Gamma_{24}^3$ und zugleich den Term $+C313C124 = \Gamma_{13}^3 \Gamma_{24}^1$. Wir sehen also, dass in den unteren Indizes sowohl das Indexpaar **13** als auch das Indexpaar **31** auftritt. Substituiert man ein Γ_{ik}^l durch einen Ausdruck, ist damit nicht zugleich der

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff
8.9.2018



symmetrische Partner Γ_{kl}^l substituiert. Es sind also stets beide Symbole separat zu substituieren, da sonst Terme fehlen.

Liste der von Null verschiedenen Christoffel-Symbole im statischen kugelsymmetrischen Gravitationsfeld und ihre Bezeichnungen

Die folgenden 9 Christoffel-Symbole sind von null verschieden und in den Klammern stehen die Koordinatenabhängigkeiten:

C111=A(1)
C122=B(1)
C133=D(12)
C144=E(1)

C212=F(1)
C221=F(1)

C233=G(2) (A13).

C313=H(1)
C331=H(1)

C323=I(2)
C332=I(2)

C414=J(1)
C441=J(1)

Liste der von Null verschiedenen Derivierten der Christoffel-Symbole im statischen kugelsymmetrischen Gravitationsfeld und ihre Bezeichnungen

Aufgrund der in (A13) zu erkennenden Koordinatenabhängigkeiten ist die Mehrzahl der Derivierten der Christoffel-Symbole gleich null. Von null verschieden sind nur die folgenden Derivierten:

C111,1=K(1)
C122,1=L(1)
C133,1=M(12) (A14).
C133,2=N(12)
C144,1=O(1)

Die Größe N tritt im Ricci-Tensor nicht auf und wird daher hier nicht benötigt.

Die Komponenten des Ricci-Tensors nach erfolgter Substitution

Werden in den Ausdrücken (A5) bis (A12) die Substitutionen gemäß (A13) und (A14) ausgeführt, sowie alle verschwindenden Terme entfernt (technisch mit Hilfe der Textverarbeitung (**suchen** und **ersetzen**, sowie **löschen**), dann verbleiben die folgenden Terme:

R11=-P-R-T+FA+HA+JA-FF-HH-JJ

R12=IF-IH

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff
8.9.2018



$$R_{21} = I - H$$

(A15).

$$R_{22} = L - S + AB + HB + JB - BF - II$$

$$R_{33} = M + Q + AD + FD + JD - DH - GI$$

$$R_{44} = O + AE + FE + HE + JE - JE - EJ$$

Es ist anzumerken, dass $R_{12} = R_{21} = 0$ gilt, da man feststellen kann, dass $F - H = 0$ gilt, wenn die konkretisierten Terme eingesetzt werden. Gemäß (13) gilt $F = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{r}$, $H = \Gamma_{13}^3 = \frac{1}{r}$ und

$$I = \Gamma_{23}^3 = \cot(\vartheta), \text{ d.h. wir sehen sofort } R_{12} = \Gamma_{23}^3 (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{13}^3) = \cot(\vartheta) \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r} \right) = 0.$$

Da die hierin auftretenden spezifischen Christoffel-Symbole sowohl in der Schwarzschild-Metrik, also auch in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik übereinstimmen, gilt $R_{12} = 0$ in beiden Metriken.

Fehlerprüfung mit Hilfe der Schwarzschild-Metrik

Die analytische Berechnung der Komponenten des Ricci-Tensors per Hand ist auf Grund der doch erheblichen Termanzahl, die in (A5) bis (A12) augenscheinlich ist, „Wahnsinn“. Entsprechend steigt die Wahrscheinlichkeit für Rechenfehler an. Darum kommt den Möglichkeiten der Kontrolle eine besondere Bedeutung zu, da sich Fehler fortpflanzen können und Folgefehler die Endresultate sofort unbrauchbar machen. Trotz der vielen Möglichkeiten der Kontrolle, wie mehrfaches Nachrechnen, Einheitenkontrolle, Plausibilitätstest, Untersuchung bestimmter bekannter Grenzwerte usw., können Fehler nicht einhundertprozentig ausgeschlossen werden. Um aber die Fehlerwahrscheinlichkeit zu minimieren, prüfen wir (A15) dadurch, dass wir (A15) auf die Schwarzschild-Metrik anwenden. Von der Schwarzschild-Metrik wissen wir, dass sie die Vakuumgleichungen

$$R_{ik} = 0 \tag{A16},$$

befriedigen muss. Aus diesem Grunde berechnen wir R_{11} , R_{22} , R_{33} und R_{44} für die Schwarzschild-Metrik. Doch um das zu realisieren, stellen wir uns zuerst eine Übersicht über die konkreten zur Schwarzschild-Metrik gehörenden Terme zusammen:

$$A = \Gamma_{11}^1 = -\frac{\frac{M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} \tag{A17},$$

$$B = \Gamma_{22}^1 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \cdot r \tag{A18},$$

$$D = \Gamma_{33}^1 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \cdot r \cdot \sin^2(\vartheta) \tag{A19},$$

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff

8.9.2018



$$E = \Gamma_{44}^1 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{M}{r^2} \quad (\text{A20}),$$

$$F = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{r} \quad (\text{A21}),$$

$$G = \Gamma_{33}^2 = -\sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) \quad (\text{A22}),$$

$$H = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \quad (\text{A23}),$$

$$I = \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = \cot(\vartheta) \quad (\text{A24}),$$

$$J = \Gamma_{14}^4 = \Gamma_{41}^4 = \frac{\frac{M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} \quad (\text{A25}),$$

$$K = \Gamma_{11,1}^1 = \frac{\frac{2M}{r^3}}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{\frac{2M^2}{r^4}}{1 - \frac{2M}{r}} \quad (\text{A26}),$$

$$L = \Gamma_{22,1}^1 = -1 \quad (\text{A27}),$$

$$M = \Gamma_{33,1}^1 = -\sin^2(\vartheta) \quad (\text{A28}),$$

$$N = \Gamma_{33,2}^1 = -2 \cdot \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \cdot r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) \quad (\text{A29}),$$

$$O = \Gamma_{44,1}^1 = \frac{6M^2}{r^4} - \frac{2M}{r^3} \quad (\text{A30}),$$

$$P = \Gamma_{12,1}^2 = -\frac{1}{r^2} \quad (\text{A31}),$$

$$Q = \Gamma_{33,2}^2 = \sin^2(\vartheta) - \cos^2(\vartheta) \quad (\text{A32}),$$

$$R = \Gamma_{13,1}^3 = -\frac{1}{r^2} \quad (\text{R ist nicht der Krümmungsskalar, sondern nur Hilfsgröße}) \quad (\text{A33}),$$

$$S = \Gamma_{23,2}^3 = -1 - \cot^2(\vartheta) \quad (\text{A34}),$$

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff
8.9.2018



$$T = \Gamma_{14,1}^4 = -\frac{\frac{2M}{r^3}}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{\frac{2M^2}{r^4}}{1 - \frac{2M}{r}} \quad (\text{A35}).$$

Wir berechnen nun die einzelnen Komponenten des zur Schwarzschild-Metrik gehörenden Ricci-Tensors. Dazu haben wir die folgenden Bildungen vorzunehmen und zu vereinfachen. Wir beginnen zunächst mit $R_{11} = -P - R - T + FA + HA + JA - FF - HH - JJ$:

$$R_{11} = \frac{2}{r^2} + \frac{\frac{2M}{r^3}}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{\frac{2M^2}{r^4}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} - \frac{\frac{M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{\frac{M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} \right) - \frac{2}{r^2} - \left(\frac{\frac{M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} \right)^2 \quad (\text{A36}),$$

es folgt zunächst

$$R_{11} = \frac{\frac{2M}{r^3}}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{\frac{2M^2}{r^4}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} - \frac{\frac{M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} \left(\frac{2}{r} + \frac{\frac{M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} \right) - \left(\frac{\frac{M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} \right)^2 \quad (\text{A37}).$$

Das Auflösen der Klammern bringt

$$R_{11} = \frac{\frac{2M}{r^3}}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{\frac{2M^2}{r^4}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} - \frac{\frac{2M}{r^3}}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{\frac{2M^2}{r^4}}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^2} \quad (\text{A38}).$$

Der erste und der dritte, sowie der zweite und der vierte Term heben sich weg, es folgt

$$R_{11} = 0 \quad (\text{A39}),$$

wie es die Einstein'schen Vakuumfeldgleichungen verlangen. Das hätte nicht funktioniert, wenn auch nur ein kleinster Fehler in der Termstruktur $R_{11} = -P - R - T + FA + HA + JA - FF - HH - JJ$ vorgelegen hätte. Wir haben also diese Struktur als korrekt anzusehen.

Wir setzen die Überprüfung fort, indem wir mit $R_{22} = L - S + AB + HB + JB - BF - II$ weiter rechnen.

$$R_{22} = -1 + 1 + \cot^2(\vartheta) - r \cdot \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \cdot \left(-\frac{\frac{M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{1}{r} + \frac{\frac{M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{1}{r} \right) - \cot^2(\vartheta) \quad (\text{A40}).$$

Wir sehen sofort, dass sich in (A40) alles weghebt.

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff
8.9.2018



$$R_{22} = 0 \quad (\text{A41}).$$

Damit ist auch die Struktur $R_{22}=L-S+B(A+H+J-F)-II$ bestätigt. Es folgt die Untersuchung der Struktur $R_{33}=M+Q+AD+FD+JD-DH-GI=M+Q+D(A+F+J-H)-GI$.

$$\begin{aligned} R_{33} = & -\sin^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta) - \cos^2(\vartheta) - \\ & -r \cdot \sin^2(\vartheta) \cdot \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \cdot \left(-\frac{\frac{M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{1}{r} + \frac{\frac{M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{1}{r}\right) + \\ & + \sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) \cdot \cot(\vartheta) \end{aligned} \quad (\text{A42}).$$

Die Beziehung (A42) vereinfacht sich, wie es sein muss, zu

$$R_{33} = -\sin^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta) - \cos^2(\vartheta) + \cos^2(\vartheta) = 0 \quad (\text{A43}).$$

Halten wir fest, auch die Struktur $R_{33}=M+Q+D(A+F+J-H)-GI$ ist korrekt.

Wir wenden uns nun der Überprüfung der letzten Struktur $R_{44}=O+AE+FE+HE+JE-JE-EJ$ zu, die sich auch in der Form $R_{44}=O+E(A+F+H-J)$ schreiben lässt. Auch hier können wir die Struktur bestätigen, denn

$$R_{44} = \frac{6M^2}{r^4} - \frac{2M}{r^3} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{M}{r^2} \left(-\frac{\frac{M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} - \frac{\frac{M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}}\right) \quad (\text{A44}),$$

$$R_{44} = \frac{6M^2}{r^4} - \frac{2M}{r^3} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \cdot \left(-\frac{\frac{M^2}{r^4}}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{2M}{r^3} - \frac{\frac{M^2}{r^4}}{1 - \frac{2M}{r}}\right) \quad (\text{A45}),$$

$$R_{44} = \frac{6M^2}{r^4} - \frac{2M}{r^3} - \frac{M^2}{r^4} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{2M}{r^3} - \frac{M^2}{r^4} \quad (\text{A46}),$$

$$R_{44} = \frac{6M^2}{r^4} - \frac{2M}{r^3} - \frac{M^2}{r^4} + \frac{2M}{r^3} - \frac{4M^2}{r^4} - \frac{M^2}{r^4} = 0 \quad (\text{A47}).$$

Zusammengefasst halten wir fest: *Die Termstrukturen in (A15) sind zutreffend und sie können für alle Berechnungen verwendet werden.*

Berechnung des Ricci-Tensors zur Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Zur Absicherung der Rechnung werden im Folgenden die relevanten Komponenten ausführlich berechnet. Wir beginnen die Berechnung mit der Festlegung der Hilfsvariablen.

$$A = \Gamma_{11}^1 = -\frac{M}{r^2} \quad (\text{B1}),$$

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff

8.9.2018



$$B = \Gamma_{22}^1 = -r \cdot e^{-\frac{2M}{r}} \quad (\text{B2}),$$

$$D = \Gamma_{33}^1 = -r \cdot \sin^2(\vartheta) \cdot e^{-\frac{2M}{r}} \quad (\text{B3}),$$

$$E = \Gamma_{44}^1 = +\frac{M}{r^2} e^{-\frac{4M}{r}} \quad (\text{B4}),$$

$$F = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = +\frac{1}{r} \quad (\text{B5}),$$

$$G = \Gamma_{33}^2 = -\sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) \quad (\text{B6}),$$

$$H = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = +\frac{1}{r} \quad (\text{B7}),$$

$$I = \Gamma_{23}^3 = \Gamma_{32}^3 = +\cot(\vartheta) \quad (\text{B8}),$$

$$J = \Gamma_{14}^4 = \Gamma_{41}^4 = +\frac{M}{r^2} \quad (\text{B9}),$$

$$K = \Gamma_{11,1}^1 = +\frac{2M}{r^3} \quad (\text{B10}),$$

$$L = \Gamma_{22,1}^1 = -\left(1 + \frac{2M}{r}\right) \cdot e^{-\frac{2M}{r}} \quad (\text{B11}),$$

$$M = \Gamma_{33,1}^1 = -\left(1 + \frac{2M}{r}\right) \cdot \sin^2(\vartheta) \cdot e^{-\frac{2M}{r}} \quad (\text{B12}),$$

$$N = \Gamma_{33,2}^1 = -2 \cdot r \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) \cdot e^{-\frac{2M}{r}} \quad (\text{B13}),$$

$$O = \Gamma_{44,1}^1 = +\left(\frac{4M^2}{r^4} - \frac{2M}{r^3}\right) \cdot e^{-\frac{4M}{r}} \quad (\text{B14}),$$

$$P = \Gamma_{12,1}^2 = -\frac{1}{r^2} \quad (\text{B15}),$$

$$Q = \Gamma_{33,2}^2 = \sin^2(\vartheta) - \cos^2(\vartheta) \quad (\text{B16}),$$

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff
8.9.2018



$$R = \Gamma_{13,1}^3 = -\frac{1}{r^2} \quad (\text{R ist nicht der Krümmungsskalar, nur Hilfsgröße}) \quad (\text{B17}),$$

$$S = \Gamma_{23,2}^3 = -1 - \cot^2(\mathcal{G}) \quad (\text{B18}),$$

$$T = \Gamma_{14,1}^4 = -\frac{2M}{r^3} \quad (\text{B19}).$$

Es folgt nun die Berechnung der Komponente $R_{11} = -P - R - T + A(F + H + J) - FF - HH - JJ$.

$$\begin{aligned} R_{11} = & -\left(-\frac{1}{r^2}\right) - \left(-\frac{1}{r^2}\right) - \left(-\frac{2M}{r^3}\right) + \\ & + \left(-\frac{M}{r^2}\right) \cdot \left(+\frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{M}{r^2}\right) - \\ & - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} - \frac{M^2}{r^4} \end{aligned} \quad (\text{B20}),$$

es folgt

$$R_{11} = +\frac{2}{r^2} + \frac{2M}{r^3} - \frac{M}{r^2} \cdot \left(+\frac{2}{r} + \frac{M}{r^2}\right) - \frac{2}{r^2} - \frac{M^2}{r^4} \quad (\text{B21}),$$

es folgt

$$R_{11} = +\frac{2M}{r^3} - \frac{M}{r^2} \cdot \left(+\frac{2}{r} + \frac{M}{r^2}\right) - \frac{M^2}{r^4} \quad (\text{B22}),$$

es folgt

$$R_{11} = +\frac{2M}{r^3} - \frac{2M}{r^3} - \frac{M^2}{r^4} - \frac{M^2}{r^4} \quad (\text{B23}),$$

es folgt

$$R_{11} = -\frac{2M^2}{r^4} \quad (\text{B24}).$$

Um $R_{12} = R_{21} = I(F - H)$ zu berechnen, reicht es aus, F und H zu vergleichen, da $F = H$ gilt, folgt unmittelbar

$$R_{12} = R_{21} = 0 \quad (\text{B25}).$$

Der Ricci-Tensor liegt, so wie es zu erwarten war, in Hauptachsenform vor. Nun berechnen wir die Komponente $R_{22} = L - S + B(A + H + J) - II$.

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff

8.9.2018



$$R_{22} = -\left(1 + \frac{2M}{r}\right) \cdot e^{\frac{2M}{r}} + 1 + \cot^2(\vartheta) - r \cdot e^{-\frac{2M}{r}} \cdot \left(-\frac{M}{r^2} + \frac{1}{r} + \frac{M}{r^2} - \frac{1}{r}\right) - \cot^2(\vartheta) \quad (\text{B26}),$$

es folgt

$$R_{22} = -\left(1 + \frac{2M}{r}\right) \cdot e^{\frac{2M}{r}} + 1 \quad (\text{B27}).$$

Zur Berechnung der 33er-Komponente beginnen wir mit $R_{33} = M + Q + D(A + F + J + H) - G_I$.

$$R_{33} = -\left(1 + \frac{2M}{r}\right) \cdot \sin^2(\vartheta) \cdot e^{\frac{2M}{r}} + \sin^2(\vartheta) - \cos^2(\vartheta) - r \cdot \sin^2(\vartheta) \cdot e^{-\frac{2M}{r}} \cdot \left(-\frac{M}{r^2} + \frac{1}{r} + \frac{M}{r^2} - \frac{1}{r}\right) + \sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) \cdot \cot(\vartheta) \quad (\text{B28}),$$

es folgt

$$R_{33} = -\left(1 + \frac{2M}{r}\right) \cdot \sin^2(\vartheta) \cdot e^{\frac{2M}{r}} + \sin^2(\vartheta) - \cos^2(\vartheta) + \sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) \cdot \cot(\vartheta) \quad (\text{B29}),$$

es folgt

$$R_{33} = -\left(1 + \frac{2M}{r}\right) \cdot \sin^2(\vartheta) \cdot e^{\frac{2M}{r}} + \sin^2(\vartheta) - \cos^2(\vartheta) + \cos^2(\vartheta) \quad (\text{B30}),$$

es folgt

$$R_{33} = -\left(1 + \frac{2M}{r}\right) \cdot \sin^2(\vartheta) \cdot e^{\frac{2M}{r}} + \sin^2(\vartheta) \quad (\text{B31}),$$

es folgt

$$R_{33} = \sin^2(\vartheta) \cdot \left(-\left(1 + \frac{2M}{r}\right) \cdot e^{\frac{2M}{r}} + 1\right) \quad (\text{B32}),$$

d.h.

$$R_{33} = \sin^2(\vartheta) \cdot R_{22} \quad (\text{B33})^{14}.$$

¹⁴ In [3] wird die Beziehung $R_{33} = -\sin^2(\vartheta) \cdot R_{22}$ für die Schwarzschild-Lösung angegeben. Daher besteht hier eventuell ein Vorzeichenwiderspruch. Doch auch die Berechnung für die Schwarzschild-Metrik, die wir hier

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff
8.9.2018



Die Bestimmung der letzten Komponente erfordert es, $R_{44} = O + E(A + F + H + J - J)$ zu berechnen.

$$R_{44} = + \left(\frac{4M^2}{r^4} - \frac{2M}{r^3} \right) \cdot e^{-\frac{4M}{r}} + \frac{M}{r^2} \left(-\frac{M}{r^2} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r} - \frac{M}{r^2} \right) \quad (\text{B34}),$$

es folgt

$$R_{44} = + \left(\frac{4M^2}{r^4} - \frac{2M}{r^3} \right) \cdot e^{-\frac{4M}{r}} + \frac{M}{r^2} \left(-\frac{2M}{r^2} + \frac{2}{r} \right) \quad (\text{B35}),$$

es folgt

$$R_{44} = + \left(\frac{4M^2}{r^4} - \frac{2M}{r^3} \right) \cdot e^{-\frac{4M}{r}} - \frac{2M^2}{r^4} + \frac{2M}{r^3} \quad (\text{B36}).$$

Berechnung des Krümmungsskalars zur Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Unter Verwendung von (40) berechnen wir nun den gesuchten Krümmungsskalar.

$$R = g^{kk} R_{kk} = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} + g^{33} R_{33} + g^{44} R_{44} \quad (\text{C1}),$$

es folgt

$$R = e^{-\frac{2M}{r}} \cdot R_{11} + \frac{1}{r^2} R_{22} + \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} R_{33} - e^{+\frac{2M}{r}} \cdot R_{44} \quad (\text{C2}),$$

es folgt mit $R_{33} = \sin^2(\vartheta) R_{22}$

$$R = -\frac{2M^2}{r^4} e^{-\frac{2M}{r}} + \frac{2}{r^2} R_{22} - e^{+\frac{2M}{r}} \cdot \left[\left(\frac{4M^2}{r^4} - \frac{2M}{r^3} \right) \cdot e^{-\frac{4M}{r}} - \frac{2M^2}{r^4} + \frac{2M}{r^3} \right] \quad (\text{C3}),$$

es folgt

$$R = -\frac{2M^2}{r^4} e^{-\frac{2M}{r}} + \frac{2}{r^2} \left[-\left(1 + \frac{2M}{r} \right) \cdot e^{-\frac{2M}{r}} + 1 \right] - e^{+\frac{2M}{r}} \left[\left(\frac{4M^2}{r^4} - \frac{2M}{r^3} \right) \cdot e^{-\frac{4M}{r}} - \frac{2M^2}{r^4} + \frac{2M}{r^3} \right] \quad (\text{C4}),$$

durchgeführt haben liefert uns $R_{22} = \sin^2(\vartheta) \cdot R_{22}$. Wir zeigen das bei den Formeln mit der Nomenklatur (D...)

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff
8.9.2018



es folgt

$$R = -\frac{2M^2}{r^4} e^{-\frac{2M}{r}} - \frac{2}{r^2} \left(1 + \frac{2M}{r}\right) \cdot e^{-\frac{2M}{r}} + \frac{2}{r^2} - e^{+\frac{2M}{r}} \left(\frac{4M^2}{r^4} - \frac{2M}{r^3}\right) \cdot e^{-\frac{4M}{r}} - e^{+\frac{2M}{r}} \left(-\frac{2M^2}{r^4} + \frac{2M}{r^3}\right) \quad (C5),$$

es folgt

$$R = -\frac{2M^2}{r^4} e^{-\frac{2M}{r}} - \frac{2}{r^2} \left(1 + \frac{2M}{r}\right) \cdot e^{-\frac{2M}{r}} + \frac{2}{r^2} - \left(\frac{4M^2}{r^4} - \frac{2M}{r^3}\right) \cdot e^{-\frac{2M}{r}} + e^{+\frac{2M}{r}} \left(\frac{2M^2}{r^4} - \frac{2M}{r^3}\right) \quad (C6)$$

$$R = +\frac{2}{r^2} + e^{-\frac{2M}{r}} \cdot \left(-\frac{2M^2}{r^4} - \frac{2}{r^2} - \frac{4M}{r^3} - \frac{4M^3}{r^4} + \frac{2M}{r^3}\right) + e^{+\frac{2M}{r}} \left(\frac{2M^2}{r^4} - \frac{2M}{r^3}\right) \quad (C7),$$

es folgt

$$R = +\frac{2}{r^2} + e^{-\frac{2M}{r}} \cdot \left(-\frac{6M^2}{r^4} - \frac{2M}{r^3} - \frac{2}{r^2}\right) + e^{+\frac{2M}{r}} \left(\frac{2M^2}{r^4} - \frac{2M}{r^3}\right) \quad (C8).$$

Für $M = 0$ folgt $R = 0$, wie es sein muss.

Kontrolle der Beziehung zwischen R_{22} und R_{33}

Wir haben als Beziehung zwischen den Komponenten R_{22} und R_{33} die Relation $R_{33} = \sin^2(\vartheta) \cdot R_{22}$ gefunden. Nach unseren Rechnungen gilt diese sowohl für die äußere Schwarzschild-Metrik als auch für die Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik. Dabei haben wir genau das gleiche Koordinatensystem und die gleiche Vorzeichensignatur für das Linienelement ds^2 verwendet, wie Stephani, d.h. dass die metrischen Tensoren für der Schwarzschild-Metrik bei Retzlaff und Stephani identisch sind, insbesondere die Wahl der Signaturen (+, +, +, -). In [3] gibt Stephani aber die Beziehung $R_{33} = -\sin^2(\vartheta) \cdot R_{22}$ für die Schwarzschild-Lösung an. Dieses andere Vorzeichen hätte z.B. wesentliche Auswirkungen auf den Wert des Krümmungsskalars R der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik, da in diesem Fall der Skalar nicht null wird. In der Schwarzschild-Lösung kommt dem Vorzeichen keine Bedeutung zu, da $R_{22} = 0$ ist. Daher besteht das Erfordernis der Prüfung und der Dokumentation. Aus der Schwarzschild-Metrik folgt in unserer weiter oben ausführlich dargestellten Rechnung nachvollziehbar die Beziehung (A40) hier (D1) genannt:

$$R_{22} = -1 + 1 + \cot^2(\vartheta) - r \cdot \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \cdot \left(-\frac{\frac{M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{1}{r} + \frac{\frac{M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{1}{r}\right) - \cot^2(\vartheta) \quad (D1).$$

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff
8.9.2018



Für die andere Komponente haben wir (A42) gefunden:

$$\begin{aligned}
 R_{33} = & -\sin^2(\vartheta) + \sin^2(\vartheta) - \cos^2(\vartheta) - \\
 & -r \cdot \sin^2(\vartheta) \cdot \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \cdot \left(-\frac{\frac{M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{1}{r} + \frac{\frac{M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{1}{r}\right) + \\
 & + \sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) \cdot \cot(\vartheta)
 \end{aligned} \tag{D2}$$

Klammern wir nun $\sin^2(\vartheta)$ aus, dann finden wir

$$\begin{aligned}
 R_{33} = & \sin^2(\vartheta) \cdot \\
 & \cdot \left[-1 + 1 - \cot^2(\vartheta) - r \cdot \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \cdot \left(-\frac{\frac{M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{1}{r} + \frac{\frac{M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{1}{r}\right) + \cot^2(\vartheta) \right]
 \end{aligned} \tag{D3}$$

Vertauschen wir die Reihenfolge der Terme mit $\cot^2(\vartheta)$, dann folgt

$$\begin{aligned}
 R_{33} = & \sin^2(\vartheta) \cdot \\
 & \cdot \left[-1 + 1 + \cot^2(\vartheta) - r \cdot \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \cdot \left(-\frac{\frac{M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} + \frac{1}{r} + \frac{\frac{M}{r^2}}{1 - \frac{2M}{r}} - \frac{1}{r}\right) - \cot^2(\vartheta) \right]
 \end{aligned} \tag{D4}$$

und wir erkennen eindeutig

$$R_{33} = \sin^2(\vartheta) \cdot R_{22}$$

durch den Vergleich mit (D1). Wir gehen daher von der Gültigkeit unserer Beziehung aus. Sollte der Leser einen Fehler finden, bitten wir um Mitteilung.

Einstein-Tensor mit kosmologischem Term

Da alle relevanten Tensorkomponenten in Hauptachsenform vorliegen, kann der Einstein-Tensor mit kosmologischem Term durch die Schreibweise

$$G_{kk} = R_{kk} - \frac{1}{2} R \cdot g_{kk} + \lambda \cdot g_{kk} \tag{E1}$$

aufgeschrieben werden. Mit den Komponenten der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik findet man dann für die Komponenten des Einstein-Tensors

Einstein-Tensor, Ricci-Tensor und Krümmungsskalar in der Post-Einstein-Schwarzschild-Metrik

Klaus Retzlaff

8.9.2018



$$\begin{aligned}G_{11} &= -\frac{2M^2}{r^4} + \frac{M^2}{r^4} e^{+\frac{2M}{r}} + \lambda \cdot e^{+\frac{2M}{r}} \\G_{22} &= \left(\frac{3M^2}{r^2} - \frac{M}{r} \right) \cdot e^{-\frac{2M}{r}} + \lambda \cdot r^2 \\G_{33} &= \sin^2(\vartheta) \cdot G_{22} \\G_{44} &= \left(\frac{M^2}{r^4} - \frac{3M}{r^3} - \frac{1}{r^2} \right) \cdot e^{-\frac{4M}{r}} - \left(\frac{M^2}{r^4} - \frac{M}{r^3} \right) + \frac{1}{r^2} e^{-\frac{2M}{r}} - \lambda \cdot e^{-\frac{2M}{r}}\end{aligned}\tag{E2}.$$