Kann die Physik der realen Raum-Zeit durch Differentialgleichungen beschrieben werden?

Klaus Retzlaff
8.10.2018

Zusammenfassung: *Der folgende Aufsatz gibt eine Überlegung von Burghardt Heim [1] wieder, die darauf hinausläuft, dass der Quantencharakter der Materie zusammen mit den Erkenntnissen aus der Einstein'schen Allgemeinen Relativitätstheorie zur Konsequenz hat, dass die fundamentalen Gleichungen der Physik keine Differentialgleichungen sein können, dass an die Stelle von Differentialgleichungen Differenzengleichungen zu treten haben, da insbesondere auch die Raum-Zeit eine körnige Struktur haben muss.*

***

Die Einstein'sche Allgemeine Relativitätstheorie aus dem Jahre 1915 beschreibt den Zusammenhang zwischen Materiefeldern einerseits und raum-zeitlicher Geometrie andererseits durch die Feldgleichungen

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R \cdot g_{ik} = \aleph \cdot T_{ik} \qquad (1),$$

wobei wir auf den kosmologischen Term verzichtet haben, da dieser zur folgenden Argumentation nichts beiträgt. In diesen Gleichungen sind die Größen R_{ik} die Komponenten des Ricci-Tensors, R ist der Krümmungsskalar und g_{ik} sind die Komponenten des metrischen Fundamentaltensors, der die Metrik

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \qquad (2)$$

regiert. Alle diese Größen in den Einstein'schen Feldgleichungen sind durch den metrischen Fundamentaltensor sowie dessen Derivierten bestimmt. Die rechte Seite der Einstein'schen Feldgleichungen repräsentiert die Materiefelder als rein phänomenologische makroskopische und nicht quantisierte Felder durch den Energie-Impuls-Spannungs-Tensor. Zieht man jedoch die Quantenphysik hinzu, in der eigentlich

$$T_{ik} = < \hat{T}_{ik} > \qquad (3)$$

quantenphysikalische Erwartungswerte sind, dann hat die Gleichungen (1) eigentlich die Form

$$R_{ik} - \frac{1}{2} R \cdot g_{ik} = \aleph \cdot < \hat{T}_{ik} > \qquad (4).$$

Doch diese Gleichung ist inkonsistent, vergleiche [2] und [3]. Sie müssten konsistent

$$< \hat{R}_{ik} - \frac{1}{2} \hat{R} \cdot \hat{g}_{ik} > = \aleph \cdot < \hat{T}_{ik} > \qquad (5)$$

lauten. Aber keiner weiß, wie die linke Seite zu verstehen ist. Insbesondere bereitet die in ihr enthaltene Nichtlinearität Probleme. Eine Riemannsche Geometrie ist so höchstens im Sinne eines quantenphysikalischen Mittels realisiert.

Nun sind die g_{ik} aber nicht nur als die Komponenten des metrischen Fundamentaltensors zu verstehen, sondern sie können wegen der geodätischen Gleichung

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{km} \dot{x}^k \dot{x}^m = 0 \qquad (6)$$

auch als Komponenten eines allgemeinen tensoriellen Wechselwirkungspotentials interpretiert werden [1]. Für die Matrizenspur gilt bekanntlich

$$g^k{}_k = 4 \qquad (7)$$

und für die Spur des Energie-Impuls-Spannungstensors gilt

$$g^{ik} T_{ik} = T^k{}_k = T \qquad (8).$$

Aus diesem Grunde folgt als Matrizenspur der Gleichungen (1)

$$g^{ik} R_{ik} - \frac{1}{2} R \cdot g^{ik} g_{ik} = \aleph \cdot g^{ik} \cdot T_{ik}$$

$$R - \frac{1}{2} R \cdot 4 = \aleph \cdot T \qquad (9).$$

$$-R = \aleph \cdot T$$

Mit diesem Ergebnis können die Einstein'schen Feldgleichungen durch einfaches Einsetzen von $R = -\aleph \cdot T$ auf die Form

$$R_{ik} = \aleph \cdot \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \cdot T \right) \qquad (10)$$

gebracht werden. Man kann die rechte Seite von (10) auch als eine erweitere Form des Energie-Impuls-Spannungstensors lesen

Kann die Physik der realen Raum-Zeit durch Differentialgleichungen beschrieben werden?

Klaus Retzlaff
8.10.2018

$$W_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} \cdot T \qquad (11).$$

Diese Energien[1] beziehen sich auf den dreidimensionalen Raum und sind selbst die zeitlichen Änderungen von Wirkungen ω_{ik}, vergleiche [1], Seite 33. Weil die Metrik ds^2 eine indefinite homogene quadratische Differentialform ist, gilt

$$g < 0 \qquad (12),$$

so dass für die Fundamentaldeterminante

$$\omega = \sqrt{-g} \qquad (13)$$

gelten muss und es folgt für die Darstellung eines vierdimensionalen Volumenelementes

$$d\Omega = \omega \cdot dx^1 \cdot dx^2 \cdot dx^3 \cdot dx^4 \qquad (14).$$

Aufgrund der imaginären Zeitdimension gilt

$$x_4 = ict \qquad (15),$$

was für den erweiterten Energiedichtetensor

$$W_{ik} = ic\omega \frac{d\omega_{ik}}{d\Omega} \qquad (16)$$

zur Folge hat.
Da Wirkungen grundsätzlich nur quantisiert auftreten, muss

$$\omega_{ik} = h \cdot N_{ik} \qquad (17)$$

gelten, wobei die N_{ik} komplexe Zahlen mit ganzzahligem Real- und Imaginärteil sind. Die Größe h ist das bekannte Planck'sche Wirkungsquantum. Das bedeutet nach Burghardt Heim, dass die in (16) auftretenden Differentiale, aufgrund der in (17) ausgedrückten quantenphysikalischen Diskontinuität, durch Differenzen zu ersetzen sind [3]. An die Stelle der Ableitung $\frac{d\omega_{ik}}{d\Omega}$ tritt die Dichte

$$\eta_{ik} = \frac{\Delta N_{ik}}{\Delta\Omega} \qquad (18).$$

Sie ist als die Zahl der sich in einem Raum-Zeit-Volumen befindlichen Wirkungsquanten zu interpretieren. Insbesondere ist die Ersetzung von $d\Omega$ durch $\Delta\Omega$ aus mathematischen Gründen zwingend, da anderenfalls ein Kontinuum aus Singularitäten entstünde und physikalische Zustände nicht definiert wären.
Mit der Größe η_{ik} folgt an Stelle von (16) die Beziehung

$$W_{ik} = i \cdot c \cdot h \cdot \omega \cdot \eta_{ik} \qquad (19)$$

und es folgen an Stelle der Einstein'schen makroskopischen phänomenologischen Gleichungen (1) die mikroskopischen Gleichungen

$$\frac{1}{\aleph} R_{ik} = w \cdot \eta_{ik} \qquad (20).$$

In (20) kommt unmittelbar zum Ausdruck, dass die physikalische Raum-Zeit nicht mehr als metrisches Kontinuum dargestellt werden kann. Insbesondere weist die diskontinuierliche Dichte $\Delta\Omega$ darauf hin, dass die Raum-Zeit selbst diskontinuierlich ist.
Aus diesem Grund scheint die Schlussfolgerung naheliegend, dass die fundamentale Beschreibung der Natur im mikroskopischen Bereich nicht mittels des Differentialkalküls möglich ist, dass demzufolge an die Stellen von Differentialgleichungen Differenzengleichungen zu treten haben.

Quellen

[1] Burkhardt Heim, „Elementarstrukturen der Materie“, Bd. 1, Resch Verlag Innsbruck, 1998
[2] Robert Rompe, Hans Jürgen Treder, „Elementarkonstanten und was sie bedeuten“, Wissenschaftliche Taschenbücher, Akademie – Verlag Berlin, 1988
[3] Paul Adrien Maurice Dirac, Vortrag 1966

---

[1] Wir fassen hier alle diese Dichten der Kürze halber unter den Begriff Energien zusammen.

Kann die Physik der realen Raum-Zeit durch Differentialgleichungen beschrieben werden?

Klaus Retzlaff

8.10.2018